Seminario THC 1: Homología y Secciones Hiperplanas

Def: Sea X un espacio topológico y $\Delta^n = \{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i = 1,\ x_i \geq 0\}$ el n-símplex estándar. Una función continua $f: \Delta^n \to X$ es llamada un n-símplex singular de X. El grupo libre abeliano generado por ellos

$$C_n(X) := \{ \sum_i n_i f_i : n_i \in \mathbb{Z},\ f_i \text{ finitos} \}$$ es el grupo de n-cadenas singulares de X.

Notación: Denotamos $I_k : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ dado por $I_k(x_0,\dots,x_{n-1}) = (x_0,\dots,x_k,0,x_{k+1},\dots,x_{n-1})$.

Def: Si f es un n-símplex singular de X, definimos $\partial_n f := \sum_{k=0}^n (-1)^k f \circ I_k \in C_{n-1}(X)$. Por linealidad extendemos este mapa a un homomorfismo de grupos abelianos $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ llamado el operador borde. Su núcleo $Z_n(X) := \ker(\partial_n)$ es llamado grupo de n-ciclos singulares de X, mientras que su imagen $B_n(X) := \operatorname{Im}(\partial_{n+1})$ es el grupo de n-bordes singulares de X.

Obs: Se verifica fácilmente que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, luego $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$, i.e.

$$(C_\bullet(X), \partial): \quad \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \to 0$$ es un complejo.

Def: El n-ésimo grupo de homología singular de X (con coeficientes en $\mathbb{Z}$) es

$$H_n(X) = H_n(X,\mathbb{Z}) := H_n^{*}(C_\bullet(X),\partial) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}.$$

Ej: $Z_0(X) = \bigoplus_{p \in X} \mathbb{Z} p$, $\quad p - q \in B_0(X)$ ssi existe un camino $f : [0,1] = I^1 \to X$ t.q. $f(0) = p$, $f(1) = q$

$$\Rightarrow H_0(X) = \mathbb{Z}^{\#\text{ comp. conexas de } X}$$

Ej: Si X es una superficie de Riemann de género g, $Z_1(X) =$ grp libre abeliano generado por loops en X

$$H_1(X) = \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_1(X \setminus \{p_1,\dots,p_d\}) = \mathbb{Z}^{2g+d-1}$$

Obs: Si $f: X \to Y$ es continua $\leadsto f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ es homomorfismo, es functorial: $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $id_* = id$.

Def: Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Decimos que f y g son homotópicas si existe una homotopía entre ellos, es decir, $H : X \times [0,1] \to Y$ continua t.q. $H|_{X \times \{0\}} = f$ y $H|_{X \times \{1\}} = g$.

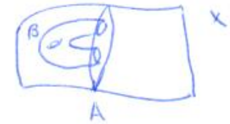
Prop: Si f y $g : X \to Y$ son homotópicas $\Rightarrow f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$.

Def: Dos espacios topológicos X, Y se dicen homotópicos si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ t.q. $f \circ g$ es homotópica a id_Y y $g \circ f$ es homotópica a id_X.

Cor: Si X e Y son homotópicos $\Rightarrow H_n(X) \cong H_n(Y)$.

Ej: Un espacio es contráctil si es homotópico a un punto. Si X es contráctil $\Rightarrow H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$.

, e.g. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^k$, $\mathbb{D}$ son contráctiles.



Def: Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$, definimos los <u>grupos de homología relativa</u> por

$$H_n(X,A) = H_n(X,A,\mathbb{Z}) := H_n(C_\cdot(X)/C_\cdot(A), \partial).$$

Obs: El mapa de borde induce un homomorfismo $H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A)$, este el llamado <u>mapa de conexión</u> e induce la <u>secuencia exacta larga del par (X,A)</u>

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

Prop: Sea X espacio topológico y $B \subseteq A \subseteq X$, entonces el trío (X,A,B) induce una secuencia larga en homología

$$\cdots \to H_n(A,B) \to H_n(X,B) \to H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A,B) \to \cdots$$

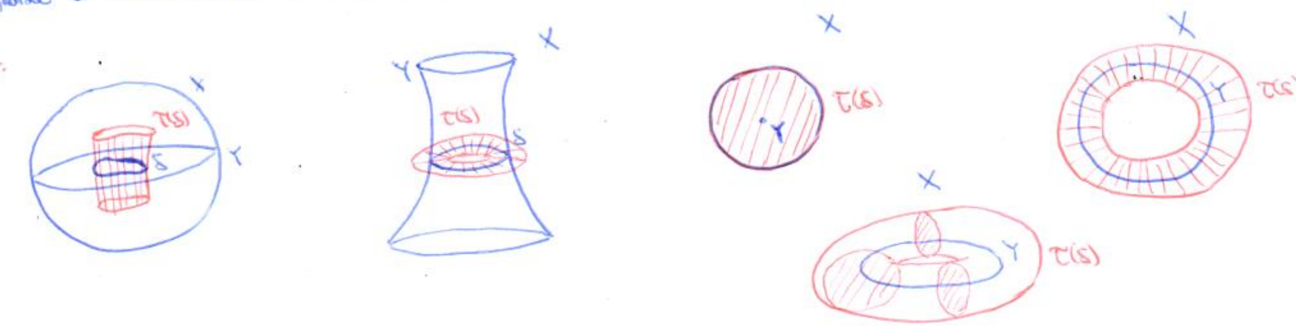
Dem: $0 \to \frac{C_\cdot(A)}{C_\cdot(B)} \to \frac{C_\cdot(X)}{C_\cdot(B)} \to \frac{C_\cdot(X)}{C_\cdot(A)} \to 0$ induce la secuencia larga. ∎

Def: Sea X una variedad diferenciable (real) orientable y sea $Y \subseteq X$ una subvariedad orientada cerrada de codimensión (real) c. Definimos el <u>mapa de Thom</u>

$$\tau : H_{n-c}(Y) \to H_n(X, X \setminus Y)$$

de la siguiente manera: considerando una métrica Riemanniana en X, podemos tomar una vecindad tubular de Y en X, i.e. un encaje C^∞ $f : E \to X$, donde E es el fibrado normal de Y en X, $f|_Y$ es la inclusión de Y en X y $f(E)$ es una vecindad abierta de Y en X. Dado $\delta \in H_{n-c}(Y)$ su imagen es obtenida por engordar δ con un c-disco transversal a Y en X, i.e. la clase de $f(B)|_\delta$, donde $B \subseteq E$ es el fibrado de bolas de radio 1 en cada fibra de E.

Ejemplos:



Teorema (Isomorfismo de Thom): El mapa de Thom es un isomorfismo. ∎

Def: El inverso $\tau^{-1} : H_n(X, X \setminus Y) \to H_{n-c}(Y)$ del mapa de Thom compuesto con $H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, X\setminus Y)$ es llamado <u>mapa de intersección</u>: $\tau^{-1} \circ j_* : H_n(X) \to H_{n-c}(Y)$.

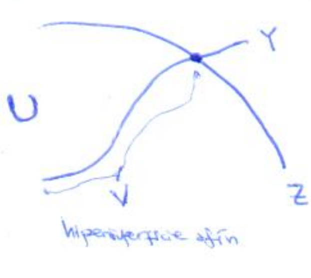
Def: Sea X una variedad (compleja) proyectiva suave, una <u>sección hiperplana</u> $Y \subseteq X$ es un divisor muy amplio, es decir, es tal que existe algún encaje $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ y un hiperplano $H \subseteq \mathbb{P}^N$ tal que $Y = X \cap H$ vía dicho encaje.

Ej: En $\mathbb{P}^N$ toda hipersuperficie $Y \subseteq \mathbb{P}^N$ de grado $d \geq 1$ es una sección hiperplana vía el encaje de Veronese $\mathbb{P}^N \xrightarrow{|\mathcal{O}(d)|} \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}$.

Obs: Por Bertini, una sección hiperplana genérica $Y \in |D|$, con D muy amplio, es suave.

Teorema (Lefschetz): Sea X variedad proyectiva suave (compleja) de dimensión n, $Z \subseteq X$ un divisor muy amplio suave e $Y \in |k \cdot Z|$ suave Y (genérico) con $Y \cap Z$ suave para algún $k \geq 1$. Entonces si $U := X \setminus Z$, $V := Y \setminus Z$

$$H_k(U,V) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \mathbb{Z}^{\mu} & \text{si } k = n \end{cases}$$



Cor: Sea X una variedad proyectiva suave de dim n, Z una sección hiperplana suave. Entonces si $U := X\setminus Z$, vale que
$$H_k(U) = 0 \qquad \forall\, k > n = \dim U$$
y $H_n(U) = \mathbb{Z}^{\alpha}$.

Dem: Por inducción en n, caso base $n=0$ ok, $n>0$ sea $Y \in |Z|$ genérico y $V := Y\setminus Z$, el par (U,V) induce
$$\cdots \to H_{k+1}(U,V) \to H_k(V) \to H_k(U) \to H_k(U,V) \to \cdots$$
si $k>n$ el resultado sigue por inducción, mientras que en $k=n$ deducimos $0 \to H_n(U) \to H_n(U,V) \simeq \mathbb{Z}^{k}$ ■

Cor: Si $Y \subseteq X^n$ es sección hiperplana suave, los mapas de intersección $H_{n+k}(X) \to H_{n+k-2}(Y)$ son isomorfismos $\forall k \geq 2$.

Dem: $(X, X\setminus Y)$ induce
$$0 = H_{n+k}(X\setminus Y) \to H_{n+k}(X) \xrightarrow{\simeq} \underset{\substack{\cong \\ H_{n+k-2}(Y)}}{H_{n+k}(X, X\setminus Y)} \to H_{n+k-1}(X\setminus Y) = 0$$ ■

Teorema (Secciones hiperplanas de Lefschetz): Sea X variedad proy suave de dim n, $Y \subseteq X$ sección hip suave. Entonces
$$H_k(X,Y) = 0 \qquad \forall\, k = 0,\dots,n-1.$$

Dem: Sea $Z \in |Y|$ genérico. Inducción en n. $n=1$: $k=0$ suc. exacta $(X,Y) \ldots \to \underset{\text{no vacío}}{H_0(Y)} \twoheadrightarrow \underset{\text{conexo}}{H_0(X)} \to \underset{0}{\underset{\|}{H_0(X,Y)}} \to 0$ ok

$n=2 \Rightarrow k=1$ el trío $V = Y\setminus Z \subseteq Y \subseteq X$ induce
$$\underset{\substack{\cong\tau \\ 0}}{H_1(Y,V)} \to H_1(X,V) \xrightarrow{\simeq} H_1(X,Y) \to \underset{\substack{\cong\tau \\ 0}}{H_0(Y,V)}$$

el trío $V \subseteq U = X\setminus Z \subseteq X$ induce
$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_1(U,V)} \to H_1(X,V) \to \underset{\substack{\cong\tau \\ 0}}{H_1(X,U)} \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_0(U,V)} \quad // \ \text{ok}$$

$n>2$: El trío $V \subseteq U \subseteq X \rightsquigarrow$
$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_k(U,V)} \to H_k(X,V) \xrightarrow{\simeq} \underset{\substack{\cong \\ H_{k-2}(Z)}}{H_k(X,U)} \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_{k-1}(U,V)}$$
$\varphi \cong$

($k<n$)

por otro lado el trío $V \subseteq Y \subseteq X$ y el par $Y\cap Z \subseteq Z$ inducen

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_k(Y,V) \arrow[r] \arrow[d, "\tau^{-1}", "\cong"'] & H_k(X,V) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi", "\cong"'] & H_k(X,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\psi\ \text{iso}"] & H_{k-1}(Y,V) \arrow[r] \arrow[d, "\tau^{-1}", "\cong"'] & H_{k-1}(X,V) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi", "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{k-2}(Y\cap Z) \arrow[r] & H_{k-2}(Z) \arrow[r] & H_{k-2}(Z, Y\cap Z) \arrow[r] & H_{k-3}(Y\cap Z) \arrow[r] & H_{k-3}(Z) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$
$\Rightarrow$ ($k-2 < n-1$) ■

Cor: $Y \hookrightarrow X$ sec. hip. suave induce isomorfismos $H_k(Y) \xrightarrow{\simeq} H_k(X)$ $\forall\, k = 0,\dots,n-2$ y un epi $H_{n-1}(Y) \twoheadrightarrow H_{n-1}(X)$.

Cor: Las sec. hip. de X dim $n>1$ son conexas.

Cor:
$$H_i(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ impar} \\ \mathbb{Z}[\mathbb{P}^{i/2}] & \text{si } i \text{ par.}\end{cases}$$

Dem: Ind. en i, $i=0$ ok, $i>0$ $H_i(\mathbb{P}^n\setminus\mathbb{P}^{n-1}) = 0$, $(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n\setminus\mathbb{P}^{n-1}) \rightsquigarrow \cdots \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_i(\mathbb{P}^n\setminus\mathbb{P}^{n-1})} \to H_i(\mathbb{P}^n) \xrightarrow[\simeq]{\text{int}} H_{i-2}(\mathbb{P}^{n-1}) \to H_{i-1}(\mathbb{C}^n) = 0$ ■

Cor: $X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} = \emptyset$ sec. hip. suaves (int. comp.)
$$H_k(X, X_i) = 0 \qquad \forall\, k \leq \dim(X_i).$$

Dem: Ind en $i = 1,\dots,n$ que $H_k(X,X_i) = 0$ $\forall\, k \leq n-i$, trío $(X, X_i, X_{i+1}) \rightsquigarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_k(X_i, X_{i+1})} \to H_k(X, X_{i+1}) \xrightarrow{\simeq} H_k(X, X_i) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_{k-1}(X_i, X_{i+1})}$ ■

Cor: Si $X \subseteq \mathbb{P}^N$ es int. completa: $H_k(\mathbb{P}^N, X) = 0 \quad \forall k \leq \dim(X)$. En part. $H_k(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } k<n \text{ impar} \\ \mathbb{Z} & \text{si } k<n \text{ par} \end{cases}$.

Prop: Sea U int. completa afín, entonces $H_k(U) = 0 \quad \forall k \neq 0, n$.

Dem: $X \subseteq \mathbb{P}^N$ int. comp. y $Z = \mathbb{P}^{N-1}_\infty \cap X$, $U = X \setminus Z$

$$\mathbb{C}^N = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots \supseteq U_{N-n} = U$$

el par $(U_i, U_{i+1}) \rightsquigarrow$

$$\underset{\overset{\|}{0}}{H_{k+1}(U_i, U_{i+1})} \to H_k(U_{i+1}) \cong H_k(U_i) \to \underset{\overset{\|}{0}}{H_k(U_i, U_{i+1})} \qquad k \neq N-i, N-i-1 \quad (0 < k \leq n-1)$$

$$H_k(U) \cong \cdots \cong H_k(\mathbb{C}^N) = 0 . \blacksquare$$

Cor: La imagen del encaje de Veronese $\mathbb{P}^n \overset{\nu_d}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^M$ no es int. completa, $n, d \geq 2$.

Dem: Tome $H \subseteq \mathbb{P}^M$ hip. genérico, luego $\nu_d(\mathbb{P}^n) \setminus H \overset{\nu_d^{-1}}{\cong} \mathbb{P}^n \setminus Y$, Y hip. de grado d, tomando par $(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus Y)$

$$\begin{tikzcd}
H_{k+1}(\mathbb{P}^n) \arrow[r] \arrow[dr, "\cdot d"', "\text{int.}"] & H_{k+1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus Y) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong"] & H_k(\mathbb{P}^n \setminus Y) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong"] & H_k(\mathbb{P}^n) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\|"] \arrow[dr] & H_k(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus Y) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\mathbb{Z} & H_{k-1}(Y) = \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & 0 & H_{k-2}(Y)
\end{tikzcd}$$

k impar

$k=1$ $\blacksquare$