

Hacia la determinación de grafos asociados a esquemas de jets de hipersuperficies singulares

Cristóbal Ignacio Montecino Rosa

Profesor Guía: Pedro Montero.

Profesor Correferente: Maximiliano Leyton Álvarez.

Memoria para optar al grado de Ingeniero Civil Matemático.

**Departamento de Matemáticas
de la Universidad Técnica Federico Santa María.**

Marzo 2026

Deseo expresar mi más profunda e inmensa gratitud a quienes han hecho posible la culminación de este camino.

En primer lugar, agradecer enormemente y de la manera más sincera a mis tutores, Maximiliano Leyton y Pedro Montero.

En segundo lugar, agradecer al profesor Hussein Mourtada por enseñarme su método para calcular sus grafos de componentes de jets. Uno de los objetivos del capítulo 2 es formalizar de otra manera algunas de esas ideas.

A mi amada familia, cuyo amor incondicional fue mi mayor sustento: a mi padre, Juan, y a mi madre, Lyn; a mis tías Carmen, María Irene y Sandra; a mis hermanos Claudia, Daniel y Javiera; y para aquellos que ya no están físicamente con nosotros —Sylvia, Exequiel, Karin, María y Juan Pablo— por haber empujado mi vida a un camino mejor.

Finalmente, extendiendo mi gratitud a mis amigos y a todo aquel que lea buscando aquí su nombre.

Agradezco a todos por su inquebrantable fe y confianza.

Resumen

El estudio de las singularidades en geometría algebraica ha encontrado en los **esquemas de jets** y los **espacios de arcos** herramientas fundamentales para extraer información topológica y geométrica que no es visible a través de métodos clásicos. Este trabajo presenta un desarrollo riguroso a los fundamentos de la teoría de esquemas de jets, culminando en una propuesta metodológica para su cálculo explícito y el análisis de sus componentes irreducibles.

El documento se estructura en dos partes esenciales. En la primera instancia, establecemos la existencia de los esquemas de jets y del espacio de arcos. Adoptamos un enfoque funtorial, definiendo estos objetos como representantes de funtores de puntos. A través de la teoría de funtores representables y límites proyectivos, demostramos la existencia global de estos esquemas mediante el pegado de cartas afines, asegurando la consistencia de las estructuras algebraicas subyacentes.

La segunda parte aborda el desafío computacional inherente a esta teoría: la determinación explícita de las componentes irreducibles de X_m para una singularidad dada, lo cual es necesario para construir el **grafo de componentes de jets**. Dado que el cálculo directo de ideales mediante bases de Gröbner se vuelve inmanejable debido a la explosión combinatoria en órdenes superiores, introducimos dos operadores diferenciales formales, denotados como ***hs*** y ***hq***.

Estos operadores, basados en las derivadas de Hasse-Schmidt, permiten sistematizar los desplazamientos de índices y las evaluaciones anidadas de manera recursiva. Aplicamos esta maquinaria algebraica para analizar singularidades de hipersuperficies, como la cúspide plana y singularidades de tipo A_3 . Los resultados evidencian cómo estos operadores no solo simplifican el cálculo, sino que revelan la naturaleza recursiva y las bifurcaciones de las componentes irreducibles en la fibra excepcional, proporcionando una vía algorítmica robusta para el estudio de invariantes topológicos mediante jets.

Índice general

1	Los esquemas de jets y los espacios de arcos	6
1.1	Esquemas de jets	6
1.1.1	Descripción y ejemplos motivacionales	6
1.1.2	Funtores representables y definición formal	9
1.1.3	Existencia de los esquemas de jets	18
1.2	Los espacios de arcos	48
1.2.1	Definición y existencia de los espacios de arcos	49
1.2.2	Los espacios de arcos como representantes	51
2	Grafos de componentes de Jets	55
2.1	Esquema de jets de variedades singulares	56
2.2	Jets por derivadas formales	57
2.2.1	Derivadas de Hasse-Schmidt	58
2.2.2	El operador diferencial hs	61
2.2.3	El operador con pesos hq	63
2.3	Ejemplos con hipersuperficies singulares	65
2.3.1	Ejemplo de la cúspide	65
2.3.2	Ejemplo de singularidad de tipo A_3	68
2.4	Conclusiones y perspectivas computacionales	72

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

En este capítulo, construiremos el **esquema de jets** como lo define Mircea Mustata para su tesis doctoral [Mus01b][Mus01a]. La construcción se basa en la de Mustata junto con Lawrence Ein en [EM09]. Existe una construcción más moderna utilizando el **Spec** relativo del haz quasi-coherente de diferenciales de Hasse-Schmidt [Voj13] que extiende la construcción desde un esquema de tipo finito sobre un cuerpo a cualquier esquema relativo. Sin embargo, para este trabajo, solo nos interesa el caso de variedades abstractas [Har77]. Por esa razón, nos basta la presentada por Ein y Mustata. Es de decir que Nash en [Nash95] define los jets aunque con el nombre de truncaciones, y, con él, construye las familias de arcos. De la misma manera, y siguiendo el artículo de Shihoko Ishii [Ishii07], construiremos primero los esquemas de jets y, como consecuencia, el de arcos.

1.1. Esquemas de jets

Construiremos, para cada entero $m \geq 0$, y de forma natural, un esquema que denotaremos por X_m , tal que cada K -punto, $\text{Spec} K \rightarrow X_m$, con K un cuerpo, corresponda a un único m -jet, $\text{Spec} K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$, y viceversa, con X un esquema fijo. El esquema X_m es llamado **esquema de m-jets** o **espacio de m-jets** de X . Más adelante daremos su definición formal, pero antes veamos unos ejemplos.

1.1.1. Descripción y ejemplos motivacionales

Sea X un esquema sobre un cuerpo k y m un entero no negativo. Dada una extensión K del cuerpo k , un **m -jet sobre X** es un morfismo $\alpha : \text{Spec} K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$ entre esquemas sobre k . El espacio de m -jets, X_m , codifica los m -jets como sus K -puntos.

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

En particular, en el caso de los 0-jets del esquema X , estos corresponden a los K -puntos de X , pues son los morfismos entre esquemas sobre k de la forma $\text{Spec } K[t]/(t) \rightarrow X$, e identificamos a la k -álgebra $K[t]/(t)$ con el cuerpo K . Por lo tanto, se deduce que el esquema de 0-jets, X_0 , es simplemente X .

Continuemos con ejemplos para entender la información que captan los m -jets.

Ejemplo 1.1.1. Los m -jets sobre $\mathbb{A}^1 = \text{Spec } k[x]$ son morfismos entre esquemas sobre el cuerpo k de la forma:

$$\alpha : \text{Spec } K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow \text{Spec } k[x],$$

donde K es una extensión de cuerpos de k . Como son esquemas afines, este morfismo α está inducido por un homomorfismo de k -álgebras:

$$\begin{aligned} k[x] &\rightarrow K[t]/(t^{m+1}) \\ x &\mapsto a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m, \end{aligned}$$

con $a_0, \dots, a_m \in K$. El m -jet está determinado por la tupla $(a_0, a_1, \dots, a_m) \in K^{m+1}$. Visto de otro modo, es un K -punto de $\mathbb{A}^{m+1} = \text{Spec } k[x_0, x_1, \dots, x_m]$. Luego, el esquema de m -jets de \mathbb{A}^1 es \mathbb{A}^{m+1} . De forma análoga, el espacio de m -jets de \mathbb{A}^r es $\mathbb{A}^{r(m+1)}$.

Ejemplo 1.1.2. El espacio tangente en el punto p de una variedad algebraica afín X sobre un cuerpo k es la variedad algebraica asociada a las derivaciones $D : k[X] \rightarrow k$ en p , es decir, a las transformaciones k -lineales tales que:

$$D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f).$$

Su fibrado tangente es $TX = \coprod_{p \in X} T_p X$, donde $T_p X$ es el espacio tangente de Zariski de X en el punto p . Sus puntos (p, D) corresponden a los 1-jets si les asignamos los 1-jets, $k[X] \rightarrow k[t]/(t^2)$, determinados por $f \mapsto f(p) + D(f)t$.

Por lo tanto, el espacio de 1-jets es el espacio tangente total de Zariski:

$$X_1 = TX.$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

En el siguiente ejemplo, detallemos más explícitamente el punto anterior para obtener una versión más concreta del esquema de 1-jets en el caso afín.

Ejemplo 1.1.3. Supongamos que X es una variedad algebraica afín definida por el ideal $(f_1, \dots, f_r) \subseteq k[x_1, \dots, x_r]$. Una derivación $D : k[x_1, \dots, x_r]/(f_1, \dots, f_s) \rightarrow k$ en un punto $p \in X$ está determinada por el punto $(D(x_1), \dots, D(x_r)) \in \mathbb{A}^r$ que además satisface $D(f_1) = \dots = D(f_s) = 0$ en el anillo $k[D(x_1), \dots, D(x_r)]$.

Por lo tanto, su espacio tangente es

$$T_p X = \{(dx_1, \dots, dx_r) \in \mathbb{A}^r \mid d(f_s) = \dots = d(f_r) = 0\},$$

donde $d : k[x_1, \dots, x_r] \rightarrow k[dx_1, \dots, dx_r]$ es la transformación k -lineal únicamente determinada por la condición $d(fg) = f(p)d(g) + g(p)d(f)$.

Por consiguiente, su espacio tangente total $TX = \coprod_{p \in X} T_p X$ es la variedad algebraica asociada al esquema:

$$X_1 = \text{Spec} \frac{k[x_1, \dots, x_r, dx_1, \dots, dx_r]}{(f_1, \dots, f_s, d(f_1), \dots, d(f_s))}.$$

En general, su esquema de m -jets es:

$$X_m = \text{Spec} \frac{k[d_0 x_1, \dots, d_0 x_r, \dots, d_m x_1, \dots, d_m x_r]}{(d_0(f_1), \dots, d_0(f_s), \dots, d_m(f_1), \dots, d_m(f_s))},$$

donde d_0, \dots, d_m son llamadas *derivaciones universales de orden superior* (o de *Hasse-Schmidt*), y se pueden encontrar en [Voj13]. Aunque no las usaremos en este trabajo, observe que solo nos basta conocer los polinomios $d_0(f_1), \dots, d_m(f_s)$. Los denotamos por $f_1^{(0)}, \dots, f_s^{(m)}$, y su construcción se dará más adelante.

El ejemplo anterior nos permite dar una definición para esquemas afines, y se expandirá en una subsección posterior. Sin embargo, no es necesaria una construcción explícita para su definición: el esquema de m -jets tiene una propiedad universal que lo caracteriza: si además de pedir que el espacio X_m codifique los m -jets como K -puntos, requerimos que también codifique familias de m -jets como S -puntos, entonces queda únicamente determinado. Para formalizar esta idea, necesitamos introducir el funtor de m -jets, F_m , que captura el problema de clasificación de familias de m -jets, y relacionarlo con el concepto de funtor representable, el cual permite asociarlo con un espacio que codifica la misma información que el funtor. Dicho eso, definimos

anticipadamente el esquema de m -jets, X_m , como el representante del funtor F_m .

1.1.2. Funtores representables y definición formal

Funtores representables

Recordaremos la noción de funtor representable haciendo un breve visita por conceptos de la teoría de categorías. Para más detalle sobre teoría de categorías en teoría de esquemas, puede consultar [Vak25]. Para teoría de categorías, puede consultar [Mac78].

Comencemos recordando las definiciones de funtores covariantes y contravariantes.

Definición 1.1.4: Funtor covariante

Un **funtor covariante** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} es una colección de reglas que asocian objetos a objetos y morfismos a morfismos:

1. Por cada objeto A de \mathcal{C} , un objeto $F(A)$ de \mathcal{D} .
2. Por cada morfismo $f : A \rightarrow B$ entre objetos de la categoría \mathcal{C} , un morfismo $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ de \mathcal{D} .

Que satisfacen las siguientes condiciones:

1. El morfismo $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ para todo objeto A de \mathcal{C} .
2. Para cualquier morfismo $g : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow C$ en \mathcal{C} , se tiene que:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

Definición 1.1.5: Funtor contravariante

Un **funtor contravariante** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} es una colección de reglas que asocian objetos a objetos y morfismos a morfismos:

1. Por cada objeto A de \mathcal{C} , un objeto $F(A)$ de \mathcal{D} .
2. Por cada morfismo $f : A \rightarrow B$ entre objetos de la categoría \mathcal{C} , un morfismo

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

$$F(f) : F(B) \rightarrow F(A) \text{ de } \mathcal{D}.$$

Que satisfacen las siguientes condiciones:

1. El morfismo $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ para todo objeto A de \mathcal{C} .
2. Para cualquier morfismo $g : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow C$ en \mathcal{C} , se tiene que:

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f).$$

A partir de ahora, solo consideraremos categorías **localmente pequeñas**, es decir, categorías donde la clase de morfismos, $\text{Hom}(A, B)$, entre dos objetos A y B es un conjunto. Esto para poder trabajar, como en el siguiente ejemplo, en la categoría de conjuntos, denotada por **Set**.

Ejemplo 1.1.6. Para una categoría \mathcal{C} , el functor contravariante $h^Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, también denotado por $\text{Hom}(-, Y)$, se define como:

$$h^Y(Z) = \text{Hom}(Z, Y) \quad \text{y} \quad h^Y(f)(g) = g \circ f,$$

para cada objeto Z y morfismo f de \mathcal{C} .

Tiene asociado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{h^Y(f)(g)} & Y \\ f \downarrow & \uparrow h^Y(f) & \parallel \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Un functor es representable si existe un cierto isomorfismo entre funtores. Para ello, recordemos las nociones que relacionan funtores.

Definición 1.1.7: Transformación natural

Una **transformación natural** $\eta : F \rightarrow G$ entre dos funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, ya sean ambos covariantes o contravariantes, es una colección de morfismos de la forma $\eta_Z : F(Z) \rightarrow G(Z)$, uno por cada objeto Z de la

categoría \mathcal{C} , tales que los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} F(Z) & \xrightarrow{\eta_Z} & G(Z) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(W) & \xrightarrow{\eta_W} & G(W) \end{array}$$

conmutan para todo morfismo $f : Z \rightarrow W$ entre objetos de \mathcal{C} para el caso covariante, y, en el caso contravariante, para todo morfismo $f : W \rightarrow Z$ entre objetos de \mathcal{C} .

La **composición** entre dos transformaciones naturales $\eta : F \rightarrow G$ y $\mu : G \rightarrow H$ se define como la transformación natural $\nu = \mu \circ \eta : F \rightarrow H$ formada por las composiciones de los morfismos $\nu_Z = \mu_Z \circ \eta_Z$, y descrita por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} F(Z) & \xrightarrow{\eta_Z} & G(Z) & \xrightarrow{\mu_Z} & H(Z) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) & & \downarrow H(f) \\ F(W) & \xrightarrow{\eta_W} & G(W) & \xrightarrow{\mu_W} & H(W) \end{array}$$

La **transformación natural identidad** $\text{id}_F : F \rightarrow F$ de un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ se define como:

$$\text{id}_F(A) = A \quad \text{y} \quad \text{id}_F(f) = f.$$

para objetos A y morfismos f de la categoría \mathcal{C} .

Observación 1.1.8. Las transformaciones naturales entre dos funtores fijos forman una categoría.

Los isomorfismos entre transformaciones naturales son llamados **isomorfismos naturales**, y su definición es la siguiente:

Definición 1.1.9: Isomorfismo natural

Una transformación natural $\eta : F \rightarrow G$ entre dos funtores F y G , ya sean ambos covariantes o contravariantes, es un **isomorfismo natural** si existe una transformación natural $\eta^{-1} : G \rightarrow F$, que llamaremos **transformación natural**

inversa, tal que:

$$\eta \circ \eta^{-1} = \text{id}_G \quad \text{y} \quad \eta^{-1} \circ \eta = \text{id}_F.$$

Si existe un isomorfismo natural entre los funtores F y G , decimos que son **naturalmente isomorfos**, y escribimos $F \cong G$ para indicarlo.

Observación 1.1.10. Dicho de otro modo, es un isomorfismo en la categoría de transformaciones naturales entre dos funtores fijos.

A pesar de está definición, probar que una transformación natural es un isomorfismo natural usaremos el siguiente resultado:

Proposición 1.1.11

Una transformación natural $\eta : F \rightarrow G$ entre funtores F y G , ambos covariantes o contravariantes, es un **isomorfismo natural** si y solo si, para todo objeto Z , el morfismo $\eta_Z : F(Z) \rightarrow G(Z)$ es un isomorfismo.

Demostración.

1. Supongamos que es un isomorfismo natural. Entonces, existe una transformación natural inversa. Por su caracterización, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{id}_{F(Z)} & & \text{id}_{G(Z)} & & \\
 & & \curvearrowright & & \curvearrowleft & & \\
 F(Z) & \xrightarrow{\eta_Z} & G(Z) & \xrightarrow{\eta_Z^{-1}} & F(Z) & \xrightarrow{\eta_Z} & G(Z) \\
 F(f) \downarrow & & G(f) \downarrow & & F(f) \downarrow & & G(f) \downarrow \\
 F(W) & \xrightarrow{\eta_W} & G(W) & \xrightarrow{\eta_W^{-1}} & F(W) & \xrightarrow{\eta_W} & G(W)
 \end{array}$$

De él concluimos que los morfismos η_Z son isomorfismos.

2. Supongamos que son isomorfismos. Se define $\eta^{-1} : G \rightarrow F$ con las inversas de los morfismos η_Z . Este forma una transformación natural porque, en el siguiente diagrama, el cuadrado D conmuta. Esto porque es inducido por las secciones A, B y C que son conmutativas.

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_{F(Z)} & & \\
 & \swarrow & \circlearrowleft_A & \searrow & \\
 F(Z) & \xrightarrow{\eta_Z} & G(Z) & \xrightarrow{\eta_Z^{-1}} & F(Z) \\
 \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) & & \downarrow F(f) \\
 & \swarrow & \circlearrowleft_B & \searrow & \\
 F(W) & \xrightarrow{\eta_W} & G(W) & \xrightarrow{\eta_W^{-1}} & F(W) \\
 & \searrow & \circlearrowleft_C & \swarrow & \\
 & & \text{id}_{F(W)} & &
 \end{array}$$

Concluimos que es la transformación natural inversa porque las composiciones $\eta \circ \eta^{-1}$ y $\eta^{-1} \circ \eta$ son identidades como se muestra en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{id}_{F(Z)} & & \text{id}_{G(Z)} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \searrow \\
 F(Z) & \xrightarrow{\eta_Z} & G(Z) & \xrightarrow{\eta_Z^{-1}} & F(Z) & \xrightarrow{\eta_Z} & G(Z) \\
 \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) & & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\
 F(W) & \xrightarrow{\eta_W} & G(W) & \xrightarrow{\eta_W^{-1}} & F(W) & \xrightarrow{\eta_W} & G(W)
 \end{array}$$

Por lo tanto, es un isomorfismo natural. □

Ahora tenemos lo necesario para definir lo que es un functor representable.

Definición 1.1.12: Functor representable

Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ un functor contravariante desde una categoría \mathcal{C} . Un objeto Y de la categoría \mathcal{C} es el **representante** del functor F cuando existe un isomorfismo natural entre el functor F y el functor contravariante $h^Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, también denotado por $\text{Hom}(-, Y)$, definido como $h^Y(Z) = \text{Hom}(Z, Y)$ de manera natural en Z .

Decimos que el functor F es **representable** cuando existe un representante, es decir, si existe un objeto Y en la categoría \mathcal{C} tal que:

$$F \cong \text{Hom}(-, Y).$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Un funtor no necesariamente es representable. Sin embargo, de serlo, su representante es único, como se enuncia en la siguiente proposición:

Proposición 1.1.13

El representante de un funtor contravariante F , si es que existe, es único salvo isomorfismo.

Demostración.

Sean Y e Y' dos representantes de un funtor F :

$$F \cong \text{Hom}(-, Y) \cong \text{Hom}(-, Y').$$

Luego, tenemos un isomorfismo natural:

$$\text{Hom}(-, Y) \xrightleftharpoons[\eta^{-1}]{\eta} \text{Hom}(-, Y')$$

Consideremos las imágenes de las identidades:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(Y, Y) & \xrightarrow{\eta} & \text{Hom}(Y, Y') \\ \text{id}_Y & \longmapsto & \eta(\text{id}_Y) \\ \\ \text{Hom}(Y', Y) & \xleftarrow{\eta^{-1}} & \text{Hom}(Y', Y') \\ \eta^{-1}(\text{id}_{Y'}) & \longleftarrow & \text{id}_{Y'} \end{array}$$

Veamos que $\eta(\text{id}_Y) : Y \rightarrow Y'$ es el isomorfismo entre Y y Y' que estamos buscando. Para ello, mostraremos que $\eta^{-1}(\text{id}_{Y'}) : Y' \rightarrow Y$ es su inversa.

Recordemos que para un morfismo $f : Y' \rightarrow Y$ cualquiera, el morfismo $h^Z(f)$ para un objeto Z de \mathcal{C} , que denotamos por $\circ f$, está definido como:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(Y, Z) & \xrightarrow{\circ f} & \text{Hom}(Y', Z) \\ [Y \xrightarrow{g} Z] & \longmapsto & [Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z] \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

Como η es una transformación natural, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

$$\begin{array}{ccc}
 \text{id}_Y & \xrightarrow{\quad} & \eta(\text{id}_Y) \\
 \downarrow & \begin{array}{ccc} \text{Hom}(Y, Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & \text{Hom}(Y, Y') \\ \downarrow \circ f & & \downarrow \circ f \end{array} & \downarrow \\
 f & \xrightarrow{\quad} & \eta(f) = \eta(\text{id}_Y) \circ f
 \end{array}$$

Entonces, el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{\eta(f)} & Y' \\
 f \downarrow & \nearrow \eta(\text{id}_Y) & \\
 Y & &
 \end{array}$$

conmuta para todo morfismo $f : Y' \rightarrow Y$.

En particular, concluimos que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{\text{id}_{Y'}} & Y' \\
 \eta^{-1}(\text{id}_{Y'}) \downarrow & \nearrow \eta(\text{id}_Y) & \\
 Y & &
 \end{array}$$

conmuta, y finalmente, por simetría, se muestra que es un isomorfismo. □

El functor de jets y la definición formal de los esquemas de jets

Enunciaremos la definición del functor que nos permite definir el espacio de m -jets. Denotamos a la categoría de esquemas sobre un cuerpo k como \mathbf{Sch}/k .

Definición 1.1.14: Functor de m -jets

Sea X un esquema sobre un cuerpo k . Para cada entero $m \geq 0$, se define el functor contravariante $F_m^X : \mathbf{Sch}/k \rightarrow \mathbf{Set}$ como:

$$F_m^X(Z) = \text{Hom}(Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X),$$

de manera natural en los esquemas Z sobre k .

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Cuando no hay ambigüedad en la elección de X , notaremos F_m^X simplemente por F_m .

La naturalidad corresponde a que el siguiente diagrama es conmutativo para cualquier un morfismo $f : W \rightarrow Z$:

$$\begin{array}{ccc}
 W & W \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{F_m(f)(\alpha)} X \\
 f \downarrow & f \times \text{id} \downarrow & \nearrow \alpha \\
 Z & Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) &
 \end{array}$$

El funtor F_m es efectivamente un funtor contravariante:

1. El morfismo $F_m(\text{id}_Z)$ es igual a la identidad por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{F_m(\text{id}_Z)(\alpha) = \alpha} & X \\
 \text{id}_Z \times \text{id} \downarrow & \nearrow \alpha & \\
 Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) & &
 \end{array}$$

2. El funtor preserva la composición porque el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & Y \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{F_m(g)(F_m(f)(\alpha)) = F_m(f \circ g)(\alpha)} & X & \\
 g \downarrow & g \times \text{id} \downarrow & & \uparrow F_m(g) & \parallel \\
 W & W \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{F_m(f)(\alpha)} & X & \\
 f \downarrow & f \times \text{id} \downarrow & & \uparrow F_m(f) & \parallel \\
 Z & Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\alpha} & X & \parallel
 \end{array}$$

Finalmente, podemos dar la definición formal del esquema de m -jets.

Definición 1.1.15: Esquema de m -jets

El representante del funtor F_m es llamado **el esquema de m -jets de X** , y se denota por X_m . Dicho de otra forma, es un esquema, X_m , sobre k tal que los siguientes funtores son isomorfos:

$$F_m \cong \text{Hom}(-, X_m). \quad (1.1)$$

Observación 1.1.16. El esquema X_m es el objeto buscado porque el conjunto de K -puntos, $\text{Hom}(\text{Spec } K, X_m)$, está en biyección con el conjunto de m -jets:

$$F_m(\text{Spec } K) = \text{Hom}(\text{Spec } K[t]/(t^{m+1}), X).$$

En el resto de la sección, probaremos que existe el representante del funtor de m -jets, es decir, que el funtor F_m es representable.

1.1.3. Existencia de los esquemas de jets

El objetivo principal de esta subsección es mostrar la existencia del esquema de m -jets de un esquema de tipo finito sobre un cuerpo. Lo construiremos extendiendo resultados desde el caso afín. Este caso inicial será nuestro primer resultado, y nos dice que el esquema de m -jets existe para un esquema X sobre un cuerpo k de tipo finito y afín. En otras palabras, existe el esquema de m -jets para los esquemas de la forma:

$$X \cong \text{Spec } k[x_1, \dots, x_r]/(f_1, \dots, f_s),$$

con $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_r]$.

Este resultado lo obtendremos mostrando que el funtor $F_m|_{\mathbf{Aff}_k}$, que es el funtor F_m restringido a la subcategoría \mathbf{Aff}_k , cumple una condición que llamaremos **casi-representable**, y, por un resultado que extiende casi-representable a representable, concluiremos que el funtor F_m es representable. Lo que probaría que el esquema de m -jets de X existe en el caso afín.

Comencemos definiendo lo que es un funtor casi-representable en una subcategoría:

Definición 1.1.17

Sea \mathcal{D} una subcategoría de una categoría \mathcal{C} y un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$. Si existe un objeto Y de \mathcal{C} y un isomorfismo natural:

$$F|_{\mathcal{D}} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)|_{\mathcal{D}},$$

diremos que $F|_{\mathcal{D}}$ es **casi-representable** por Y .

Ahora, veamos como la condición de ser casi-representable implica ser representable utilizando densidad de subcategorías.

En particular, mostraremos que, utilizando la densidad de la subcategoría \mathbf{Aff}_k en la categoría de esquemas sobre k , el funtor de m -jets, F_m , permite levantar la condición de ser casi-representable en \mathbf{Aff}_k a la categoría completa, y, por consiguiente, ser un funtor representable.

Antes de ello, recordemos la definición de subcategoría densa.

Definición 1.1.18

Sea una categoría \mathcal{C} . Una subcategoría \mathcal{D} de \mathcal{C} es **densa** cuando todo objeto X de \mathcal{C} es el siguiente colímite:

$$X = \mathrm{colim}_{(A,f) \in \mathcal{D}/X} A.$$

La categoría \mathcal{D}/X es la categoría \mathcal{D} sobre X , es decir, de los objetos A de \mathcal{D} junto con morfismos $f : A \rightarrow X$, donde los morfismos $(A, f) \rightarrow (B, g)$ de esas categorías son morfismos $h : A \rightarrow B$ que factorizan $f : A \rightarrow X$ como $f = g \circ h$.

Un ejemplo importante, y que utilizaremos, es la categoría de esquemas afines sobre un cuerpo k , y que denotamos por \mathbf{Aff}_k . Esta subcategoría es densa en la categoría de esquemas sobre k porque es equivalente a la existencia del pegado de morfismos hacia un esquema fijo. Además, en este caso, podemos escribir el colímite $\mathrm{colim}_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/X} A$ como un límite directo $\lim_{\rightarrow (A,f) \in \mathbf{Aff}_k/X}$ porque la subcategoría contiene todos los productos fibrados $A \times_X B$.

Como notamos anteriormente, un funtor representable es casi-representable sobre cualquier subcategoría. Sin embargo, aunque el sentido contrario no es necesaria-

mente verdad, cuando la subcategoría es densa y el funtor F es bien portado, como es en el caso del funtor de m -jets, F_m , entonces son condiciones equivalentes. Esta extensión se establece en la siguiente proposición, aunque específicamente para el funtor de m -jets y la subcategoría \mathbf{Aff}_k . Sin embargo, la demostración es generalizable, y la condición sobre el funtor es transformar aquellos colímites a límites.

Proposición 1.1.19

Sea X un esquema sobre un cuerpo k y $F_m : \mathbf{Sch}/k \rightarrow \mathbf{Set}$ su funtor de m -jets. Si $F_m|_{\mathbf{Aff}_k}$ es casi-representable por un esquema Y sobre k , entonces F_m es representable por Y .

Demostración. Supongamos que $F_m|_{\mathbf{Aff}_k}$ es casi-representable por un esquema Y sobre k , es decir, existe un isomorfismo natural:

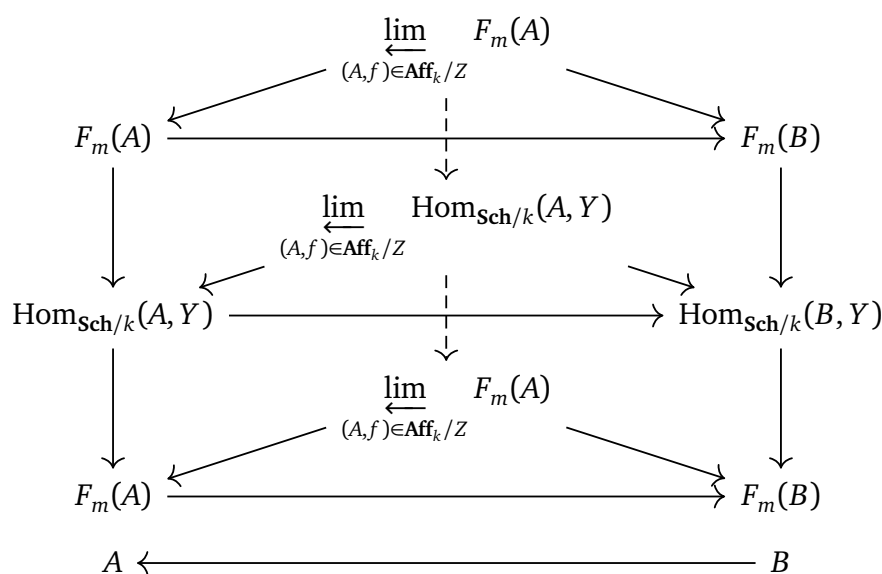
$$\nu : F_m|_{\mathbf{Aff}_k} \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/k}(-, Y)|_{\mathbf{Aff}_k}.$$

Hay que probar que existe un isomorfismo natural $\eta : F_m \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/k}(-, Y)$.

Sea Z un esquema sobre k . Para todo $(A, f) \in \mathbf{Aff}_k/Z$, consideremos los isomorfismos:

$$\nu_A : F_m(A) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/k}(A, Y).$$

Por la universalidad del limite, el siguiente diagrama conmuta:



1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Existe un isomorfismo:

$$\varprojlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} \nu_A : \varprojlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} F_m(A) \rightarrow \varprojlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k}(A, Y).$$

Notemos que:

$$\varprojlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k}(A, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k} \left(\varinjlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} A, Y \right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k}(Z, Y).$$

Por otro lado, tenemos las siguientes correspondencias:

$$\begin{aligned} F_m \left(\varinjlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} A \right) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k} \left(\left(\varinjlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} A \right) \times_{\mathrm{Spec} k} \mathrm{Spec} k[t]/(t^{m+1}), X \right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k} \left(\varinjlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} (A \times_{\mathrm{Spec} k} \mathrm{Spec} k[t]/(t^{m+1})), X \right) \\ &\cong \varprojlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k} (A \times_{\mathrm{Spec} k} \mathrm{Spec} k[t]/(t^{m+1}), X) \\ &\cong \varprojlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} F_m(A). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el isomorfismo $\varprojlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} \nu_A$ equivale a un isomorfismo:

$$\eta_Z : F_m(Z) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k}(Z, Y).$$

Finalmente, los isomorfismos η_Z conforman un isomorfismo natural:

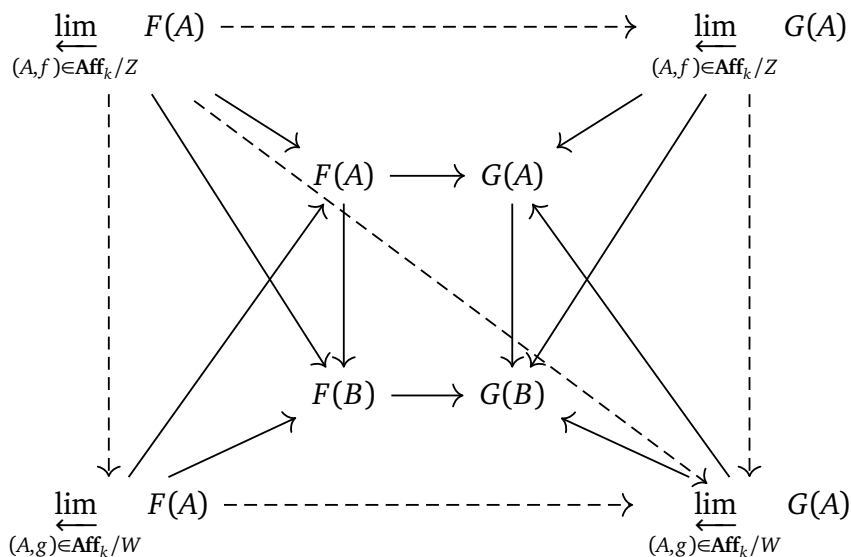
$$\eta : F_m \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k}(-, Y),$$

Es natural porque el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} Z & & \varprojlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} F_m(A) & \longrightarrow & \varprojlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/Z} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k}(A, Y) \\ \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ W & & \varprojlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/W} F_m(A) & \longrightarrow & \varprojlim_{(A,f) \in \mathbf{Aff}_k/W} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/k}(A, Y) \end{array}$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Esto se obtiene de la factorización única de los morfismos entre los límites como muestra el diagrama conmutativo de la siguiente página. La existencia de esa factorización se obtiene al notar que los objetos \mathbf{Aff}_k/W son objetos de \mathbf{Aff}_k/Z a través del pullback inducido por $W \rightarrow Z$.



□

Continuando con nuestra discusión, el resultado de existencia de esquemas de m -jets de esquemas afines lo obtendremos encontrando un representante X_m^{aff} del funtor $F_m|_{\mathbf{Aff}_k}$. Esto nos permitirá mostrar que el funtor $F_m|_{\mathbf{Aff}_k}$ es casi-representable, y concluiremos que el funtor F_m es representable por la proposición 1.1.19. Lo que prueba que su esquema de m -jets existe.

La construcción del esquema afín X_m^{aff} requiere definir polinomios que dependen de los polinomios f_1, \dots, f_s de nuestro esquema $X \cong \text{Spec } k[x_1, \dots, x_r]/(f_1, \dots, f_s)$. Estos se definen de la siguiente manera.

Para un polinomio $f \in k[x_1, \dots, x_r]$ cualquiera con coeficientes en un cuerpo k y enteros $m \geq u \geq 0$, definimos $f^{(u)} \in k[x_i^{(j)} \mid \substack{i=1, \dots, r \\ j=0, \dots, u}]$ como:

$$f\left(\sum_{j=0}^m x_1^{(j)} t^j, \dots, \sum_{j=0}^m x_r^{(j)} t^j\right) = f^{(0)}(\mathbf{x}^{(0)}) + f^{(1)}(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}) t + \dots + f^{(u)}(\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(u)}) t^u + \dots,$$

donde $\mathbf{x}^{(j)} = x_1^{(j)}, \dots, x_r^{(j)}$ para todo $j = 0, \dots, m$, y resaltamos que la expansión ocurre en el anillo de polinomios $k[x_i^{(j)} \mid \substack{i=1, \dots, r \\ j=0, \dots, m}][t]$.

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Para entender esta definición, considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.20. Consideremos $f = x_1^2 - x_2^3$. Para $m = 2$, su expansión es:

$$f\left(\sum_{j=0}^2 x_1^{(j)} t^j, \sum_{j=0}^2 x_2^{(j)} t^j\right) = \left((x_1^{(0)})^2 - (x_2^{(0)})^3\right) + \left(2x_1^{(0)}x_1^{(1)} - 3(x_2^{(0)})^2x_2^{(1)}\right)t \\ + \left(2x_1^{(0)}x_1^{(2)} + (x_1^{(1)})^2 - 3(x_2^{(0)})^2x_2^{(2)} - 3x_2^{(0)}(x_2^{(1)})^2\right)t^2 + \dots$$

Con estos polinomios, podemos definir el esquema X_m^{aff} y mostrar que el funtor $F_m|_{\text{Aff}_k}$ es casi-representable. Esto se realiza en la siguiente proposición:

Proposición 1.1.21

Si $X = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_r]/(f_1, \dots, f_s)$ con k un cuerpo y $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_r]$, entonces, para todo entero $m \geq 0$, el funtor $F_m|_{\text{Aff}_k}$ es casi-representable por el esquema afín:

$$X_m^{\text{aff}} = \text{Spec } k\left[x_i^{(j)} \mid \substack{i=1, \dots, r \\ j=0, \dots, m}\right] / \left(f_\ell^{(u)} \mid \substack{\ell=1, \dots, s \\ u=0, \dots, m}\right).$$

En particular, $F_m|_{\text{Aff}_k}$ es representable en la categoría de esquemas afines.

Demostración. Denotemos por:

$$k[X] = k[x_1, \dots, x_r]/(f_1, \dots, f_s) \quad \text{y} \quad k[X_m] = k\left[x_i^{(j)} \mid \substack{i=1, \dots, r \\ j=0, \dots, m}\right] / \left(f_\ell^{(u)} \mid \substack{\ell=1, \dots, s \\ u=0, \dots, m}\right).$$

Como la categoría opuesta de esquemas afines sobre k es equivalente a la categoría de k -álgebras, que denotaremos por \mathbf{Alg}_k , solo debemos probar que existe un isomorfismo natural:

$$\text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(k[X], A[t]/(t^{m+1})) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(k[X_m^{\text{aff}}], A),$$

para las k -álgebras A .

Antes de ello, estableceremos la correspondencia que la define.

Sea A una k -álgebra y $\alpha : k[X] \rightarrow A[t]/(t^{m+1})$ un homomorfismo entre k -álgebras. Existen constantes $\alpha_i^{(j)} \in A$ para $i = 1, \dots, r$ y $j = 0, \dots, m$ determinadas por las

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

imágenes de las variables:

$$x_i \mapsto \sum_{j=0}^m a_i^{(j)} t^j.$$

Se define el homomorfismo $\alpha^m : k[X_m^{\text{aff}}] \rightarrow A$ entre k -álgebras como:

$$x_i^{(j)} \mapsto a_i^{(j)}.$$

Para ver que α^m está bien definido, debemos comprobar que los polinomios $f_\ell^{(u)}$, donde $\ell = 1, \dots, s$ y $u = 0, \dots, m$, son anulados por α^m . De la definición, sabemos que $\alpha(f_\ell) = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 = \alpha(f_\ell) &= f_\ell \left(\sum_{j=0}^m a_1^{(j)} t^j, \dots, \sum_{j=0}^m a_r^{(j)} t^j \right) \\ &= \sum_{u=0}^m f_\ell^{(u)}(a_1^{(0)}, \dots, a_r^{(u)}) t^u \\ &= \sum_{u=0}^m \alpha^m(f_\ell^{(u)}) t^u. \end{aligned}$$

Concluyendo que $\alpha^m(f_\ell^{(u)}) = 0$. Lo que implica que el homomorfismo α^m está bien definido.

Se define el candidato a isomorfismo natural η como la colección de funciones $\{\eta_A\}$, donde la función $\eta_A : \text{Hom}(k[X], A[t]/(t^{m+1})) \rightarrow \text{Hom}(k[X_m^{\text{aff}}], A)$, para las k -álgebras A , están definidas como:

$$\eta_A(\alpha) = \alpha^m,$$

para los homomorfismos $\alpha : k[X] \rightarrow A[t]/(t^{m+1})$ entre k -álgebras.

Verificaremos que las funciones η_A son biyectivas:

- (I) Veamos primero que son sobreyectivas. Para un homomorfismo $\beta : k[X_m^{\text{aff}}] \rightarrow A$, existen constantes $a_i^{(j)} \in A$ para $i = 0, \dots, r$ y $j = 0, \dots, m$ determinadas por las imágenes de las variables:

$$x_i^{(j)} \mapsto a_i^{(j)}.$$

Se define el homomorfismo $\alpha : k[X] \rightarrow A[t]/(t^{m+1})$ como:

$$x_i \mapsto \sum_{j=0}^m a_i^{(j)} t^j.$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Para ver que está bien definido, debemos comprobar que los polinomios f_ℓ , donde $\ell = 1, \dots, s$ y $u = 0, \dots, m$, son anulados por α . De la definición de β , sabemos que $\beta(f_\ell^{(u)}) = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha(f_\ell(x_1, \dots, x_r)) &= f_\ell\left(\sum_{j=0}^m a_1^{(j)} t^j, \dots, \sum_{j=0}^m a_r^{(j)} t^j\right) \\ &= \sum_{u=0}^m f_\ell^{(u)}(a_1^{(0)}, \dots, a_i^{(j)}, \dots, a_r^{(u)}) t^u \\ &= \sum_{u=0}^m \beta(f_\ell^{(u)}) t^u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluyendo que $\alpha(f_\ell) = 0$. Lo que implica que el homomorfismo α está bien definido.

Finalmente, como $\alpha^m(x_i^{(j)}) = a_i^{(j)} = \beta(x_i^{(j)})$, se obtiene que $\alpha^m = \beta$. Verificando que β tiene una preimagen α .

(II) Para terminar, comprobemos que son inyectivas. Supongamos que α_1 y α_2 son dos homomorfismos $k[X] \rightarrow A[t]/(t^{m+1})$ entre k -álgebras tales que $\alpha_1^m = \alpha_2^m$.

Sean $a_i^{(j)} \in A$ para $i = 1, \dots, r$ y $j = 0, \dots, m$ tales que $\alpha_1(x_i) = \sum_{j=0}^m a_i^{(j)} t^j$, y sean $b_i^{(j)} \in A$ tales que $\alpha_2(x_i) = \sum_{j=0}^m b_i^{(j)} t^j$.

Luego,

$$a_i^{(j)} = \alpha_1^m(x_i^{(j)}) = \alpha_2^m(x_i^{(j)}) = b_i^{(j)},$$

para todo $i = 1, \dots, r$ y $j = 0, \dots, m$.

Concluyendo que $\alpha_1 = \alpha_2$ porque $\alpha_1(x_i) = \alpha_2(x_i)$ para todo $i = 1, \dots, r$.

Por lo tanto, las funciones η_A son biyectivas:

$$\left\{ \begin{array}{l} k[X] \rightarrow A[t]/(t^{m+1}) \\ x_i \mapsto \sum_{j=0}^m a_i^{(j)} t^j \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k[X_m^{\text{aff}}] \rightarrow A \\ x_i^{(j)} \mapsto a_i^{(j)} \end{array} \right\}.$$

Probaremos que η es el isomorfismo natural buscado. Solo nos falta verificar que el siguiente diagrama es conmutativo para todo homomorfismo $f : A \rightarrow B$ entre k -álgebras:

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha & \xrightarrow{\quad} & \alpha^m \\
 \downarrow & \begin{array}{c} \text{Hom}(k[X], A[t]/(t^{m+1})) \xrightarrow{\eta_A} \text{Hom}(k[X_m], A) \\ (f \times \text{id}) \circ \downarrow \quad \downarrow f \circ \end{array} & \downarrow \\
 (f \times \text{id}) \circ \alpha & \xrightarrow{\quad} & ((f \times \text{id}) \circ \alpha)^m \stackrel{?}{=} f \circ \alpha^m
 \end{array}$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 x_i & \xrightarrow{\quad} & \sum_{j=0}^m a_i^{(j)} t^j \\
 \downarrow & \begin{array}{c} k[X] \xrightarrow{\alpha} A[t]/(t^{m+1}) \\ \parallel \quad \quad \quad \downarrow f \times \text{id} \\ k[X] \xrightarrow{(f \times \text{id}) \circ \alpha} B[t]/(t^{m+1}) \end{array} & \downarrow \\
 x_i & \xrightarrow{\quad} & \sum_{j=0}^m f(a_i^{(j)}) t^j
 \end{array}$$

Del diagrama, se deduce que:

$$(f \circ \alpha^m)(x_i^{(j)}) = f(a_i^{(j)}) \quad \text{y} \quad ((f \times \text{id}) \circ \alpha)^m(x_i^{(j)}) = f(a_i^{(j)}).$$

Por lo tanto,

$$((f \times \text{id}) \circ \alpha)^m = f \circ \alpha^m.$$

Concluyendo que η es el isomorfismo natural buscado. □

Extenderemos el resultado anterior a cualquier esquema X isomorfo a $X' = \text{Spec} k[x_1, \dots, x_r]/(f_1, \dots, f_s)$. Para lograrlo, necesitamos de la siguiente proposición:

Proposición 1.1.22

Sean X y X' dos esquemas sobre un cuerpo k . Si $X \cong X'$, entonces, para todo entero $m \geq 0$, sus funtores de m -jets, F_m^X y $F_m^{X'}$, son naturalmente isomorfos, es decir, $F_m^X \cong F_m^{X'}$.

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Demostración. Sea $f : X \rightarrow X'$ un isomorfismo entre los esquemas.

Definimos η como la colección de funciones $\{\eta_Z\}$, una para cada k -álgebra Z , donde $\eta_Z : \text{Hom}(Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X) \rightarrow \text{Hom}(Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X')$ se define como la función:

$$\alpha \mapsto f \circ \alpha.$$

Es decir, la imagen de un morfismo $\alpha : Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$ es el morfismo:

$$Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} X'.$$

Sea Z una k -álgebra, y consideremos la función η_Z .

- La función η_Z es sobreyectiva: Sea $\beta : Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X'$ entre esquemas sobre k . Consideremos el morfismo $\alpha = f^{-1} \circ \beta$. Como $f \circ \alpha = \beta$, concluimos que η_Z es una función sobreyectiva.
- La función η_Z es inyectiva: Sea α_1 y α_2 dos morfismos $Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$ entre esquemas sobre k tales que $f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2$. Como f es un isomorfismo, concluimos que $\alpha_1 = \alpha_2$. Por lo tanto, η_Z es una función inyectiva.

Concluyendo que las funciones η_Z son biyectivas.

Para mostrar que η es un isomorfismo natural, basta con verificar que es natural, es decir, que, para todo morfismo $Z \rightarrow W$ entre esquemas sobre k , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X) & \xrightarrow{f \circ} & \text{Hom}(Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X') \\ \downarrow \circ(g \times \text{id}) & & \downarrow \circ(g \times \text{id}) \\ \text{Hom}(W \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X) & \xrightarrow{f \circ} & \text{Hom}(W \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X') \end{array}$$

Efectivamente, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \alpha \downarrow & \xrightarrow{\quad} & \downarrow f \circ \alpha \\ \text{Hom}(Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X) & \xrightarrow{f \circ} & \text{Hom}(Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X') \\ \downarrow \circ(g \times \text{id}) & & \downarrow \circ(g \times \text{id}) \\ \text{Hom}(W \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X) & \xrightarrow{f \circ} & \text{Hom}(W \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X') \\ \alpha \circ (g \times \text{id}) \downarrow & \xrightarrow{\quad} & \downarrow f \circ \alpha \circ (g \times \text{id}) \end{array}$$

Concluyendo que η es el isomorfismo natural buscado. \square

Por lo tanto, podemos extender la proposición 1.1.21, y concluir que, si un esquema X es isomorfo a X' , entonces su funtor $F_m|_{\text{Aff}_k}$ es casi-representable. Además, como consecuencia de la proposición 1.1.19, el funtor F_m es representable, es decir, el esquema de m -jets existe para esas condiciones. Este es nuestro primer resultado de existencia del esquema de m -jets, y se presenta como el siguiente corolario:

Corolario 1.1.23

Sea X un esquema sobre un cuerpo k . Si existen $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_r]$ y un isomorfismo $X \cong \text{Spec } k[x_1, \dots, x_r]/(f_1, \dots, f_s)$, entonces el funtor de m -jets, F_m , de X es representable y su esquema de m -jets, X_m , es isomorfo al esquema afín X_m^{aff} , es decir,

$$X_m \cong \text{Spec } k\left[x_i^{(j)} \mid \substack{i=1, \dots, r \\ j=0, \dots, m}\right] / (f_\ell^{(u)} \mid \substack{\ell=1, \dots, s \\ u=0, \dots, m}).$$

Nuestro segundo resultado de existencia nos dice que, si suponemos la existencia del esquema de m -jets, X_m , de un esquema X , entonces el esquema de m -jets, U_m , de cualquier abierto $U \subseteq X$ existe, y es isomorfo a un abierto de X_m .

Para obtener este segundo resultado, relacionaremos el esquema de m -jets, X_m , con el esquema de 0-jets, $X_0 \cong X$. Esto relacionará el abierto U con el esquema U_m . En general, podemos relacionar el esquema de m -jets con el esquema de p -jets para cualquier par de enteros $0 \leq p \leq m$.

Como la construcción que sigue no se simplifica al considerar $p = 0$, se realizará para cualquier $p \geq 0$. Además, nos será de utilidad para más adelante.

Sean enteros $0 \leq p \leq m$. Sea $\varphi_{m,p} : k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow k[t]/(t^{p+1})$ el homomorfismo definido como:

$$f(t) + (t^{m+1}) \mapsto f(t) + (t^{p+1}),$$

para todo $f(t) \in k[t]$.

Verifiquemos que está bien definido. Sean $f(t), g(t) \in k[t]$ dos representantes del mismo elemento de $k[t]/(t^{m+1})$, es decir, tales que:

$$f(t) - g(t) \in (t^{m+1}).$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Luego, como $p \leq m$,

$$f(t) - g(t) \in (t^{m+1}) \subseteq (t^{p+1}).$$

Concluyendo que las imágenes de $f(x)$ y $g(x)$ son iguales. Por lo tanto, el homomorfismo está bien definido.

Definición 1.1.24: Morfismo de truncación natural

Definimos el **morfismo de truncación natural** $\tau_{p,m} : \text{Spec} k[t]/(t^{p+1}) \rightarrow \text{Spec} k[t]/(t^{m+1})$ entre esquemas sobre k como el morfismo asociado al homomorfismo $\varphi_{m,p}$.

Este morfismo nos permite truncar m -jets, $\text{Spec} K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$, a p -jets, $\text{Spec} K[t]/(t^{p+1}) \rightarrow X$. Lo que nos establece un morfismo $\pi_{m,p} : X_m \rightarrow X_p$ que relaciona el esquema de m -jets, X_m , con el esquema de p -jets, X_p . Su definición es la siguiente. Denotemos por $j_m : X_m \times_{\text{Spec} k} \text{Spec} k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$ al morfismo correspondiente al morfismo identidad $X_m \rightarrow X_m$.

Definición 1.1.25: Morfismo de proyección canónica

El **morfismo de proyección canónica** $\pi_{m,p} : X_m \rightarrow X_p$ es el único morfismo que está en correspondencia con el morfismo:

$$X_m \times_{\text{Spec} k} \text{Spec} k[t]/(t^{p+1}) \xrightarrow{\text{id} \times \tau_{p,m}} X_m \times_{\text{Spec} k} \text{Spec} k[t]/(t^{m+1}) \xrightarrow{j_m} X.$$

Cuando $p = 0$, denotamos por $\pi_m : X_m \rightarrow X$ al morfismo $\pi_{m,0}$, identificando X_0 con X .

Como notamos anteriormente, el morfismo de truncación canónica nos permite transformar m -jets a p -jets. En particular, podemos transformar un m -jet, $\text{Spec} K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$, a un 0-jet, $\text{Spec} K \rightarrow X$. Para entenderlo, daremos una definición equivalente en términos del funtor de puntos.

Sea x un S -punto de X_m . Sea $\alpha : S \times_{\text{Spec} k} \text{Spec} k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$ su m -jet asociado. Para $0 \leq p \leq m$, se define $\pi_{m,p}(x)$ como el S -punto de X_p correspondiente al p -jet $S \times_{\text{Spec} k} \text{Spec} k[t]/(t^{p+1}) \rightarrow S \times_{\text{Spec} k} \text{Spec} k[t]/(t^{m+1}) \xrightarrow{\alpha} X$ dado por la p -truncación de α . De esta manera, definimos una aplicación $\pi_{m,p}(s) : X_m(S) \rightarrow X_p(S)$. Por el lema

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

de Yoneda, $\text{Nat}(X_m(-), X_p(-)) \cong \text{Hom}(X_m, X_p)$, le corresponde un único morfismo, y este morfismo es $\pi_{m,p}$.

En particular, podemos transformar un m -jet, $\text{Spec}K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$, a un 0-jet, $\text{Spec}K \rightarrow X$. Esto se relaciona con el morfismo de proyección canónica $\pi_m : X_m \rightarrow X$, y nos permite entender la conexión entre un morfismo $\alpha^m : Z \rightarrow X_m$ con su morfismo $\alpha : Z \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$ correspondiente. La siguiente proposición establece esto con un diagrama conmutativo que relaciona los morfismos α , α^m y π_m .

Proposición 1.1.26

Sea X un esquema sobre un cuerpo k . Supongamos que existe el esquema de m -jets, X_m , de X , con proyección canónica $\pi_m : X_m \rightarrow X$.

Sea Z un esquema sobre k . Consideremos un morfismo $\alpha^m : Z \rightarrow X_m$. Si $\alpha : Z \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$ es el morfismo entre esquemas sobre k que corresponde al morfismo α por definición del esquema de m -jets, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{\alpha^m} & X_m \\
 \text{id} \times \tau_{0,m} \downarrow & & \downarrow \pi_m \\
 Z \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\alpha} & X
 \end{array}$$

Demostración. Sea $j_m : X_m \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X_m$ el morfismo correspondiente al morfismo identidad $X_m \rightarrow X_m$. Por naturalidad de la definición del esquema de m -jets, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \pi_m \\
 & & & & \curvearrowright \\
 Z & \xrightarrow{\alpha^m} & X_m & \xrightarrow{\text{id} \times \tau_{0,m}} & X_m \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{j_m} & X \\
 \parallel & & & & \uparrow \alpha^m \times \text{id} & \nearrow \alpha & \\
 Z & \xrightarrow{\text{id} \times \tau_{0,m}} & Z \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) & & & &
 \end{array}$$

La naturalidad se usa para mostrar que el morfismo diagonal es α .

Concluyendo la prueba. □

Esta última proposición nos dice que el morfismo de proyección canónica π_m nos entrega el punto inicial $t = 0$ sobre X del m -jet asociado al punto en X_m . Para entender esto, considere un m -jet, $\alpha : \text{Spec}K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$, sobre X . La función continua subyacente a α envía el único punto de $\text{Spec}K[t]/(t^{m+1})$ a un punto de X . Por otro lado, si consideramos el punto $\alpha^m : \text{Spec}K \rightarrow X_m$ correspondiente a α en X_m y seguimos el diagrama, el punto de $\text{Spec}K$ corresponde al mismo punto en X después de aplicar π_m .

Ahora, si consideramos el lugar $\pi_m^{-1}(U) \subseteq X_m$, este corresponde a todos los m -jets donde su punto está sobre U . Por lo tanto, el abierto $\pi_m^{-1}(U)$ es el esquema de m -jets de U . Para demostrar aquello de manera formal, al igual que con el primer resultado de existencia, mostraremos primero que el funtor $F_m^U|_{\text{Aff}_k}$ es casi-representable por $\pi_m^{-1}(U)$ en la siguiente proposición.

Sea X un esquema sobre un cuerpo k . Consideremos $U \subseteq X$ un abierto, y denotamos por F_m^U a su funtor de m -jets.

Proposición 1.1.27

Sea $m \geq 0$ un entero. Supongamos que su esquema de m -jet, X_m , existe, y sea $\pi_m : X_m \rightarrow X$ su morfismo de proyección canónica.

Si $U \subseteq X$ es un abierto, entonces el funtor $F_m^U|_{\text{Aff}_k}$ es casi-representable por $\pi_m^{-1}(U)$.

Demostración. Debemos construir un isomorfismo natural:

$$\text{Hom}(\text{Spec}A[t]/(t^{m+1}), U) \cong \text{Hom}(\text{Spec}A, \pi_m^{-1}(U)),$$

para las k -álgebras A .

Vamos a definir las funciones $\eta_A : \text{Hom}(\text{Spec}A[t]/(t^{m+1}), U) \rightarrow \text{Hom}(\text{Spec}A, \pi_m^{-1}(U))$ que componen nuestro candidato a isomorfismo natural.

Sea $\alpha : \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \rightarrow U$ un morfismo entre esquemas sobre k , donde A es una k -álgebra. Consideremos el morfismo γ formado por la siguiente composición:

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\alpha} & U \\ & \searrow \gamma & \downarrow \subseteq \\ & & X \end{array}$$

Por definición del esquema de m -jets de X , al morfismo γ le corresponde un único morfismo:

$$\gamma^m : \text{Spec}A \rightarrow X_m.$$

Queremos restringir el morfismo hacia $\pi_m^{-1}(U)$. Para ello, veamos que su imagen, de manera conjuntista, está contenida en $\pi_m^{-1}(U)$.

Sea $\mathfrak{p} \in \text{Spec}A$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p} & \xrightarrow{\quad} & \gamma^m(\mathfrak{p}) \\ \downarrow & \begin{array}{c} \text{Spec}A \xrightarrow{\gamma^m} X_m \\ \text{id} \times \tau_{0,m} \downarrow \quad \searrow \gamma \\ \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \xrightarrow{\alpha} U \end{array} & \downarrow \pi_m \\ \mathfrak{p}+(t) & \xrightarrow{\quad} & \alpha(\mathfrak{p}+(t)) = \pi_m(\gamma^m(\mathfrak{p})) \end{array}$$

Notemos que $\alpha(\mathfrak{p}+(t)) \in U$. Luego, $\pi_m(\gamma^m(\mathfrak{p})) \in U$. Por lo tanto,

$$\gamma^m(\mathfrak{p}) \in \pi_m^{-1}(U).$$

Luego, existe un único morfismo $\alpha^m : \text{Spec}A \rightarrow \pi_m^{-1}(U)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}A & \xrightarrow{\alpha^m} & \pi_m^{-1}(U) \\ & \searrow \gamma^m & \downarrow \subseteq \\ & & X_m \end{array}$$

(1.2)

La flecha punteada, y las siguientes, están para indicar que es el único morfismo que cumple el diagrama.

Se define el candidato a isomorfismo natural η como la colección de funciones $\{\eta_A\}$, donde las funciones $\eta_A : \text{Hom}(\text{Spec}A[t]/(t^{m+1}), U) \rightarrow \text{Hom}(\text{Spec}A, \pi_m^{-1}(U))$, para

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

las k -álgebras A , están definidas como:

$$\eta_A(\alpha) = \alpha^m,$$

para los morfismos $\alpha : \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \rightarrow U$ entre esquemas sobre k .

Verificaremos que son funciones biyectivas:

- (I) Primero, comprobemos que son sobreyectivas. Sea $\beta : \text{Spec}A \rightarrow \pi_m^{-1}(U)$ un morfismo entre esquemas sobre k , donde A es una k -álgebra. Consideremos el morfismo γ^m formado por la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}A & \xrightarrow{\beta} & \pi_m^{-1}(U) \\ & \searrow \gamma^m & \downarrow \subseteq \\ & & X_m \end{array}$$

(1.3)

Por definición del esquema de m -jets de X , al morfismo γ^m le corresponde un único morfismo:

$$\gamma : \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X.$$

Veamos que su imagen está contenida en U .

Sea $\mathfrak{p} \in \text{Spec}A[t]/(t^{m+1})$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p} & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \beta(\mathfrak{p}) \\ \downarrow & \begin{array}{ccc} \text{Spec}A & \xrightarrow{\beta} & \pi_m^{-1}(U) \hookrightarrow X_m \\ \text{id} \times \tau_{0,m} \downarrow & & \downarrow \pi_m \\ \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array} & \downarrow \\ \mathfrak{p}+(t) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \gamma(\mathfrak{p}+(t)) = \pi_m(\beta(\mathfrak{p})) \end{array}$$

Notemos que $\beta(\mathfrak{p}) \in \pi_m^{-1}(U)$. Por lo tanto,

$$\gamma(\mathfrak{p}+(t)) = \pi_m(\beta(\mathfrak{p})) \in U.$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Concluyendo que el morfismo $\gamma : \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$ se puede restringir a un único morfismo $\alpha : \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \rightarrow U$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\alpha} & U \\ & \searrow \gamma & \downarrow \subseteq \\ & & X \end{array}$$

Por definición del esquema de m -jets de X , este diagrama corresponde al diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}A & \xrightarrow{\alpha^m} & \pi_m^{-1}(U) \\ & \searrow \gamma^m & \downarrow \subseteq \\ & & X_m \end{array}$$

Considerando este diagrama junto con el diagrama 1.3, concluimos que $\beta = \alpha^m$ por la unicidad de la restricción.

Mostrando que β tiene una preimagen α .

- (II) Para concluir la biyectividad, veamos que son inyectivas. Sean α_1 y α_2 dos morfismos $\text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \rightarrow U$ tales que $\alpha_1^m = \alpha_2^m$.

Sean γ_1 y γ_2 las composiciones dadas por los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\alpha_1} & U \\ & \searrow \gamma_1 & \downarrow \subseteq \\ & & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\alpha_2} & U \\ & \searrow \gamma_2 & \downarrow \subseteq \\ & & X \end{array} \tag{1.4}$$

Les corresponden los morfismos $\gamma_1^m : \text{Spec}A \rightarrow X_m$ y $\gamma_2^m : \text{Spec}A \rightarrow X_m$ respectivamente. Al igual que antes, se cumplen los siguientes diagramas conmutativos:

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}A & \xrightarrow{\alpha_1^m} & \pi_m^{-1}(U) \\
 \searrow \gamma_1^m & & \downarrow \subseteq \\
 & & X_m
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Spec}A & \xrightarrow{\alpha_2^m} & \pi_m^{-1}(U) \\
 \searrow \gamma_2^m & & \downarrow \subseteq \\
 & & X_m
 \end{array}$$

Como $\alpha_1^m = \alpha_2^m$, se obtiene que $\gamma_1^m = \gamma_2^m$.

Luego, por la unicidad en la correspondencia del esquema de m -jets de X , obtenemos que el morfismo $\gamma_1^m = \gamma_2^m$ corresponde al morfismo $\gamma_1 = \gamma_2$.

Finalmente, por los diagramas 1.4 y la unicidad de la restricción, se concluye que $\alpha_1 = \alpha_2$.

Concluyendo que las funciones η_A son biyectivas.

Probaremos que η es el isomorfismo natural buscado. Solo nos falta verificar que el siguiente diagrama es conmutativo para todo homomorfismo $f : A \rightarrow B$ entre k -álgebras:

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha & \xrightarrow{\hspace{15em}} & \alpha^m \\
 \downarrow & \text{Hom}(\text{Spec}A[t]/(t^{m+1}), U) \longrightarrow \text{Hom}(\text{Spec}A, \pi_m^{-1}(U)) & \downarrow \\
 & \circ(f^* \times \text{id}) \downarrow & \downarrow \circ f^* \\
 (\alpha \circ (f^* \times \text{id})) & \text{Hom}(\text{Spec}B[t]/(t^{m+1}), U) \longrightarrow \text{Hom}(\text{Spec}B, \pi_m^{-1}(U)) & \downarrow \\
 & \xrightarrow{\hspace{15em}} & (\alpha \circ (f^* \times \text{id}))^m \stackrel{?}{=} \alpha^m \circ f^*
 \end{array}$$

Sean δ y γ morfismos definidos por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \alpha \circ (f^* \times \text{id}) & & \\
 & \searrow & \text{arc} & \searrow & \\
 \text{Spec}B[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{f^* \times \text{id}} & \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\alpha} & U \\
 & \searrow \delta & \searrow \gamma & & \downarrow \\
 & & & & X
 \end{array}$$

Por la naturalidad de la correspondencia del esquema de m -jets de X , el siguiente diagrama solido es conmutativo:

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & (\alpha \circ (f^* \times \text{id}))^m \\
 & & & & \curvearrowright \\
 \text{Spec } B & \xrightarrow{f^*} & \text{Spec } A & \xrightarrow{\alpha^m} & \pi_m^{-1}(U) \\
 & \searrow \delta^m & & \searrow \gamma^m & \downarrow \\
 & & & & X_m
 \end{array}$$

Luego, por la construcción de η , existen únicas flechas punteadas que hacen que el diagrama anterior sea conmutativo. Finalmente, por la unicidad de la flecha $(\alpha \circ (f^* \times \text{id}))^m$, se muestra que:

$$(\alpha \circ (f^* \times \text{id}))^m = \alpha^m \circ f^*.$$

Concluyendo que η es el isomorfismo natural buscado. □

Luego, por el proposición 1.1.19, como el funtor $F_m^U|_{\text{Aff}_k}$ es casi-representable, el funtor F_m es representable. Obteniendo como corolario el segundo resultado de existencia:

Corolario 1.1.28

Sea $m \geq 0$ un entero. Supongamos que el esquema de m -jets de X existe, y sea $\pi_m : X_m \rightarrow X$ su morfismo de proyección canónica.

Si $U \subseteq X$ es un abierto, entonces F_m^U es representable, y su esquema de m -jets, U_m , es isomorfo al esquema $\pi_m^{-1}(U)$. Dicho de otra manera,

$$U_m \cong \pi_m^{-1}(U).$$

Por lo tanto, junto con el corolario 1.1.23, podemos construir el esquema de m -jets para cualquier abierto contenido en un esquema afín. En particular, para la intersección de dos de sus abiertos. Ahora, si consideramos $X = \bigcup U_i$ un cubrimiento de abiertos afines, entonces, para cada U_i , existe su esquema de m -jets, $U_{i,m}$, y, por el resultado anterior, también existen para cualquiera de sus intersecciones entre abiertos $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Así, podemos pegar los esquemas $U_{i,m}$ de manera compatible con las intersecciones para construir el esquema de m -jets, X_m , de X . Por la proposición 1.1.13, esta construcción es independiente de la elección del cubrimiento. Obteniendo una

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

construcción para el esquema de m -jets de cualquier esquema X de tipo finito sobre un cuerpo. Esto es teorema principal de la sección, y su enunciado es el siguiente:

Teorema 1.1.29

Para todo entero $m \geq 0$, existe el esquema de m -jets de un esquema X de tipo finito sobre un cuerpo k .

Demostración. Sea X un esquema de tipo finito sobre un cuerpo k . Consideremos un cubrimiento de abiertos afines:

$$X = \bigcup_i U_i,$$

donde los U_i son esquemas afines de tipo finito sobre k .

Para cada U_i , existen sus esquemas de m -jets, $U_{i,m}$, por el corolario 1.1.23. Denotemos por $\pi_{i,m} : U_{i,m} \rightarrow U_i$ a sus morfismos de proyección canónica.

Definamos los abiertos que serán compatibles en el pegado:

$$U_{ij,m} = \pi_{i,m}^{-1}(U_i \cap U_j) \subseteq U_{i,m}.$$

Denotemos por $\text{id}_{U_{ij,m}}$ al morfismo identidad $U_{ij,m} \rightarrow U_{ij,m}$.

Como consecuencia de la corolario 1.1.28, los abiertos $U_{ij,m}$ y $U_{ji,m}$ son isomorfos al esquema de m -jets de $U_{ij} = U_i \cap U_j$. **Sin embargo, esto no es suficiente para asegurar el pegado: hay que verificar condiciones en la triple intersección.**

Para ello, necesitamos estudiar concretamente este isomorfismo, pero antes **definiremos, para cada i, j , unas aplicaciones T_{ij} que nos ayudarán a estudiar sus propiedades.**

Sea $f : Z \rightarrow \pi_{i,m}^{-1}(V)$ un morfismo para un esquema Z sobre k y un abierto $V \subseteq U_i \cap U_j$. Definimos $T_{ij}(f)$ siguiendo las biyecciones dadas por los isomorfismos $\text{Hom}(Z, U_{ij,m}) \cong \text{Hom}(Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), U_{ij}) \cong \text{Hom}(Z, U_{ji,m})$, como muestra el siguiente diagrama:

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{f} & \pi_{i,m}^{-1}(V) & \hookrightarrow & U_{i,m} \\
 & & \downarrow \text{Correspondencia de } U_{i,m} & & \\
 Z \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\alpha} & V & \hookrightarrow & U_i \\
 & & \downarrow \text{Correspondencia de } U_{j,m} & \searrow & U_j \\
 Z & \xrightarrow{T_{ij}(f)} & \pi_{j,m}^{-1}(V) & \hookrightarrow & U_{j,m}
 \end{array}$$

Las flechas punteadas indican que existe una única flecha dada f .

Por la unicidad de la correspondencia, se tienen las siguientes propiedades:

1. $T_{ii}(f) = f$,
2. $T_{jk}(T_{ij}(f)) = T_{ik}(f)$,

para todo i, j, k .

Ahora, definimos siguientes morfismos $\varphi_{ij} : U_{ij,m} \rightarrow U_{ji,m}$ dados por:

$$\varphi_{ij} = T_{ij}(\text{id}_{U_{ij,m}}).$$

Notemos que $U_{ii,m} = U_{i,m}$, y que $\varphi_{ii} = \text{id}_{U_{ii,m}} = \text{id}_{U_{i,m}}$; las cuales son condiciones requeridas para el pegado.

Para verificar que φ_{ij} son isomorfismos, necesitamos antes el siguiente lema técnico. Además, lo ocuparemos en múltiples instancias.

Lema 1.1.30

Sea $f : Z \rightarrow \pi_{i,m}^{-1}(V_1)$ un morfismo desde un esquema Z sobre k . Si $V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq U_i \cap U_j$ son abiertos, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{f} & \pi_{i,m}^{-1}(V_1) & \xrightarrow{\subseteq} & \pi_{i,m}^{-1}(V_2) & \xrightarrow{T_{ij}(\iota)} & \pi_{j,m}^{-1}(V_3) \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ Z & \xrightarrow{T_{ij}(f)} & \pi_{j,m}^{-1}(V_1) & \xrightarrow{\subseteq} & \pi_{j,m}^{-1}(V_2) & \xrightarrow{\subseteq} & \pi_{j,m}^{-1}(V_3) \end{array}$$

donde $\iota : \pi_{i,m}^{-1}(V_2) \rightarrow \pi_{i,m}^{-1}(V_3)$ es la inclusión.

Demostración. Denotemos por $D_k^m = \text{Spec } k[t]/(t^{m+1})$. La conmutatividad del diagrama se obtiene aplicando correspondencias a los morfismos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{f} & \pi_{i,m}^{-1}(V_1) & \hookrightarrow & \pi_{i,m}^{-1}(V_2) & \xrightarrow{T_{ij}(\iota)} & \pi_{j,m}^{-1}(V_3) \hookrightarrow U_{j,m} \\ & & & & & \text{Correspondencia de } U_{j,m} \downarrow & \\ Z \times_{\text{Spec } k} D_k^m & \longrightarrow & \pi_{i,m}^{-1}(V_1) \times_{\text{Spec } k} D_k^m & \hookrightarrow & \pi_{i,m}^{-1}(V_2) \times_{\text{Spec } k} D_k^m & \dashrightarrow & V_3 \hookrightarrow U_j \\ & & & & & \text{Correspondencia de } U_{i,m} \downarrow & \searrow \\ & & & & & & U_i \\ Z & \xrightarrow{f} & \pi_{i,m}^{-1}(V_1) & \hookrightarrow & \pi_{i,m}^{-1}(V_2) \xrightarrow{\iota} & \pi_{i,m}^{-1}(V_3) \hookrightarrow & U_{i,m} \\ & & & & & \text{Correspondencia de } U_{i,m} \downarrow & \\ Z \times_{\text{Spec } k} D_k^m & \dashrightarrow & V_1 & \hookrightarrow & V_2 & \hookrightarrow & V_3 \hookrightarrow U_i \\ & & & & & \text{Correspondencia de } U_{j,m} \downarrow & \searrow \\ & & & & & & U_j \\ Z & \xrightarrow{T_{ij}(f)} & \pi_{j,m}^{-1}(V_1) & \hookrightarrow & \pi_{j,m}^{-1}(V_2) & \hookrightarrow & \pi_{j,m}^{-1}(V_3) \hookrightarrow U_{j,m} \end{array}$$

donde las flechas punteadas representan a los únicos morfismos correspondientes. \square

Mostraremos que los morfismos φ_{ij} son isomorfismos al satisfacer $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ji} = \text{id}$. Consideremos la siguiente aplicación del lema anterior:

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_{j,m}^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{\varphi_{ji}} & \pi_{i,m}^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_{i,m}^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{T_{ij}(\text{id})=\varphi_{ij}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ij}) \\
 \parallel & & & & & & \parallel \\
 \pi_{j,m}^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{T_{ij}(\varphi_{ji})=\text{id}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ij})
 \end{array}$$

Para comprobar que el pegado es compatible, basta verificarlo, como es estándar, en la triple intersección.

Denotamos $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$, y definimos $\varphi_{ijk} : U_{ijk,m} \rightarrow U_{ijk,m}$ como:

$$\varphi_{ijk} = T_{ij}(\text{id}_{U_{ijk,m}}).$$

Análogo a lo anterior, los morfismos φ_{ijk} son isomorfismos al utilizar el lema 1.1.30:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_{j,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\varphi_{jik}} & \pi_{i,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_{i,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{T_{ij}(\text{id})=\varphi_{ijk}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ijk}) \\
 \parallel & & & & & & \parallel \\
 \pi_{j,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{T_{ij}(\varphi_{jik})=\text{id}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ijk})
 \end{array}$$

Pegaremos los esquemas $U_{i,m}$ a lo largo de los isomorfismos φ_{ij} . Nos falta verificar que φ_{ij} es compatible con φ_{ijk} en la triple intersección y que se cumple la condición de cociclo.

(I) **Veamos que φ_{ij} es compatible con φ_{ijk} en la triple intersección.** Utilizando el lema 1.1.30, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_{i,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_{i,m}^{-1}(U_{ijk}) & \hookrightarrow & \pi_{i,m}^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{T_{ij}(\text{id})=\varphi_{ij}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ij}) \\
 \parallel & & & & & & \parallel \\
 \pi_{i,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{T_{ij}(\text{id})=\varphi_{ijk}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ijk}) & \hookrightarrow & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ij})
 \end{array}$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{i,m}^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ij}) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \pi_{i,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\varphi_{ijk}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ijk})
 \end{array}$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Concluyendo que es compatible en la triple intersección.

(II) **Verifiquemos que cumple la condición de cociclo.** Utilizando el lema 1.1.30, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_{i,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\varphi_{ijk}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\varphi_{jki}} & \pi_{k,m}^{-1}(U_{ijk}) \\
 \parallel & & & & & & \parallel \\
 \pi_{i,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{T_{jk}(\varphi_{ijk}) = \varphi_{ikj}} & \pi_{k,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_{k,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_{k,m}^{-1}(U_{ijk})
 \end{array}$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_{i,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\varphi_{ijk}} & \pi_{j,m}^{-1}(U_{ijk}) & \xrightarrow{\varphi_{jki}} & \pi_{k,m}^{-1}(U_{ijk}) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \varphi_{ikj} & &
 \end{array}$$

Concluyendo que se cumple la condición de cociclo.

Por lo tanto, los esquemas $U_{i,m}$ se pegan formando un esquema Y .

Para terminar, comprobaremos que $F_m|_{\text{Aff}_k}$ es casi-representable por Y .

Debemos construir un isomorfismo natural:

$$\text{Hom}(\text{Spec}A[t]/(t^{m+1}), X) \cong \text{Hom}(\text{Spec}A, Y),$$

para las k -álgebras A .

Definiremos las funciones $\eta_A : \text{Hom}(\text{Spec}A[t]/(t^{m+1}), X) \rightarrow \text{Hom}(\text{Spec}A, Y)$ que componen nuestro candidato a isomorfismo natural.

Sea $\alpha : \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$ un morfismo entre esquemas sobre k , donde A es una k -álgebra.

Le asociaremos un morfismo $\alpha^m : \text{Spec}A \rightarrow Y$. Se obtendrá considerando las restricciones α_i del morfismo α a los abiertos U_i , y luego pegando los morfismos α_i^m correspondientes.

Para obtener la preimagen adecuada para la restricción, consideremos el morfismo f definido como:

$$f : \text{Spec}A \xrightarrow{\text{id} \times \tau_{0,m}} \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \xrightarrow{\alpha} X. \quad (1.5)$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Ahora, consideremos las siguientes restricciones de α . Definimos $\gamma_i : f^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow U_i$ como la restricción de α a los abiertos U_i .

Veamos porqué el morfismo γ_i existe.

Sea $y \in f^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1})$. Existe un abierto afín $W \subseteq f^{-1}(U_i)$ tal que $y \in W \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1})$. Como W es afín, existe una k -álgebra B tal que $W \cong \text{Spec}B$. Luego, existe un punto $\mathfrak{p} \in \text{Spec}B$ tal que y corresponde al punto $\mathfrak{p} + (t)$ en $\text{Spec}B[t]/(t^{m+1})$, y el punto \mathfrak{p} corresponde a un punto $x \in f^{-1}(U_i)$. Por lo tanto, la imagen de y por α es igual a la imagen de x por f como se muestra en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & y & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \alpha(y)=f(x) \\
 f^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\text{id} \times \tau_{0,m}} & f^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\alpha} & X \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 \text{Spec}B & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{Spec}B[t]/(t^{m+1}) & & \\
 \mathfrak{p} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathfrak{p} + (t) & &
 \end{array}$$

Como $x \in f^{-1}(U_i)$, se concluye que la imagen de y por α pertenece a U_i , y, por lo tanto, el morfismo γ_i existe.

El morfismo γ_i es el único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\alpha|_{f^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1})}} & \\
 f^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\gamma_i} & U_i \hookrightarrow X
 \end{array}$$

De la misma manera, denotamos, para los abiertos U_{ij} , como $\gamma_{ij} : f^{-1}(U_{ij}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow U_{ij}$ a las restricciones de α a los abiertos U_{ij} .

Por definición del espacio de m -jets, existen morfismos γ_i^m, γ_j^m y γ_{ij}^m correspondientes a los morfismos γ_i, γ_j y γ_{ij} .

Luego, definimos los morfismos $\alpha_i^m : f^{-1}(U_i) \rightarrow Y$ como:

$$\alpha_i^m : f^{-1}(U_i) \xrightarrow{\gamma_i^m} U_{i,m} \hookrightarrow Y. \tag{1.6}$$

De la misma manera, definimos $\alpha_{ij}^m : f^{-1}(U_{ij}) \rightarrow Y$.

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Se deduce que:

$$\alpha_i^m|_{f^{-1}(U_{ij})} = \alpha_{ij}^m = \alpha_j^m|_{f^{-1}(U_{ij})}.$$

Concluyendo que los morfismos se pegan en un único morfismo $\alpha^m : \text{Spec}A \rightarrow Y$.

Se define el candidato a isomorfismo natural η como la colección de funciones $\{\eta_A\}$, con las funciones $\eta_A : \text{Hom}(\text{Spec}A[t]/(t^{m+1}), X) \rightarrow \text{Hom}(\text{Spec}A, Y)$, para las k -álgebras A , definidas como:

$$\eta_A(\alpha) = \alpha^m,$$

para los morfismos $\alpha : \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$ entre esquemas sobre k .

Verificaremos que η_A es una función biyectiva.

Sea $\beta : \text{Spec}A \rightarrow Y$ un morfismo entre esquemas sobre k .

Le asociaremos un morfismo $\alpha : \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$. Se obtendrá considerando las restricciones β_i del morfismo β a los abiertos $U_{i,m}$, y luego pegando sus morfismos correspondientes α_i .

Se define los morfismos $\beta_i : \beta^{-1}(U_{i,m}) \rightarrow U_{i,m}$ como la restricción a $U_{i,m}$ del morfismo β . De la misma manera, definimos los morfismos $\beta_{ij} : \beta^{-1}(U_{ij,m}) \rightarrow U_{ij,m}$.

Por definición del espacio de m -jets, existen únicos morfismos $\delta_i : \beta^{-1}(U_{i,m}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow U_i$ y $\delta_{ij} : \beta^{-1}(U_{ij,m}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow U_{ij}$ correspondiente a los morfismos β_i y β_{ij} , respectivamente.

Luego, definimos los morfismos $\alpha_i : \beta^{-1}(U_{i,m}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$ como:

$$\alpha_i : \beta^{-1}(U_{i,m}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) \xrightarrow{\delta_i} U_i \hookrightarrow X.$$

De manera análoga, definimos los morfismos:

$$\alpha_{ij} : \beta^{-1}(U_{ij,m}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X.$$

Se deduce que:

$$\alpha_i|_{\beta^{-1}(U_{ij,m}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1})} = \alpha_{ij} = \alpha_j|_{\beta^{-1}(U_{ij,m}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1})}.$$

Concluyendo que los morfismos α_i se pegan en un único morfismo:

$$\alpha : \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X.$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Veamos que α es la preimagen de β , es decir, que $\alpha^m = \beta$. Basta ver que la igualdad se mantiene sobre todo $\beta^{-1}(U_{i,m})$, es decir, probaremos que $\alpha^m|_{\beta^{-1}(U_i)} = \beta|_{\beta^{-1}(U_i)}$.

Antes de esto, veamos que $\beta^{-1}(U_{i,m}) \subseteq f^{-1}(U_i)$. Esto se obtiene del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \text{Spec}A & \xrightarrow{\text{id} \times \tau_{0,m}} & \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\alpha} & X \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \beta^{-1}(U_{i,m}) & \xrightarrow{\text{id} \times \tau_{0,m}} & \beta^{-1}(U_{i,m}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\delta_i} & U_i
 \end{array}$$

Luego, como $\beta^{-1}(U_{i,m}) \subseteq f^{-1}(U_i)$, por construcción (ver la eq. (1.6)),

$$\alpha^m|_{\beta^{-1}(U_{i,m})} = \iota \circ \gamma_i^m|_{\beta^{-1}(U_{i,m})},$$

donde $\iota : U_{i,m} \hookrightarrow Y$ es el morfismo inclusión.

Notemos que $\beta|_{\beta^{-1}(U_i)} = \iota \circ \beta_i$.

Por lo tanto, basta con comprobar que:

$$\gamma_i^m|_{\beta^{-1}(U_{i,m})} = \beta_i.$$

Por definición del espacio de m -jets de U_i , es equivalente a probar que sus morfismos correspondientes son iguales:

$$\gamma_i|_{\beta^{-1}(U_{i,m}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1})} = \delta_i.$$

Lo cual se obtiene del siguiente diagrama conmutativo y la unicidad de la restricción:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}A[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\alpha} & X \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 f^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\gamma_i} & U_i \\
 \uparrow & & \parallel \\
 \underbrace{\beta^{-1}(U_{i,m}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1})}_{\gamma_i|_{\beta^{-1}(U_{i,m}) \times_{\text{Spec}k} \text{Spec}k[t]/(t^{m+1})}} & \xrightarrow{\delta_i} & U_i
 \end{array}$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Concluyendo que β tiene una única preimagen α . Por lo tanto, la función η_A es biyectiva.

Finalmente, probaremos que η es el isomorfismo natural buscado. Solo nos falta verificar que el siguiente diagrama es conmutativo para todo homomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ entre k -álgebras:

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha & \xrightarrow{\quad} & \alpha^m \\
 \downarrow & \text{Hom}(\text{Spec}A[t]/(t^{m+1}), X) \longrightarrow \text{Hom}(\text{Spec}A, Y) & \downarrow \\
 & \circ(\varphi^* \times \text{id}) \downarrow & \downarrow \circ \varphi^* \\
 & \text{Hom}(\text{Spec}B[t]/(t^{m+1}), X) \longrightarrow \text{Hom}(\text{Spec}B, Y) & \\
 (\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id})) & \xrightarrow{\quad} & (\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))^m \stackrel{?}{=} \alpha^m \circ \varphi^*
 \end{array}$$

Es decir, hay que probar que $(\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))^m = \alpha^m \circ \varphi^*$. Basta con mostrar la igualdad en un cubrimiento de abiertos de $\text{Spec}B = \bigcup V_i$, es decir, mostraremos que

$$(\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))^m|_{V_i} = \alpha^m \circ \varphi^*|_{V_i}.$$

Definimos los abiertos V_i de $\text{Spec}B$ como:

$$V_i = (\varphi^*)^{-1}(f^{-1}(U_i)).$$

Por lo tanto,

$$\alpha^m \circ \varphi^*|_{V_i} = \alpha^m|_{f^{-1}(U_i)} \circ R\varphi^*|_{V_i},$$

donde $R\varphi^*|_{V_i}$ es el único morfismo tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 & \varphi^*|_{V_i} & \\
 & \curvearrowright & \\
 V_i & \xrightarrow{R\varphi^*|_{V_i}} f^{-1}(U_i) \longrightarrow & \text{Spec}A
 \end{array}$$

Por construcción, ver la eq. (1.6),

$$\alpha^m \circ \varphi^*|_{V_i} = \alpha_i^m \circ R\varphi^*|_{V_i}.$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \alpha \circ \varphi^*|_{V_i} & & \\
 & \searrow & \curvearrowright & \searrow & \\
 & & \alpha_i^m & & \\
 V_i & \xrightarrow{R\varphi^*|_{V_i}} & f^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\gamma_i^m} & U_{i,m} \hookrightarrow Y \\
 & \searrow & \curvearrowright & \searrow & \\
 & & (\gamma_i \circ (R\varphi^*|_{V_i} \times \text{id}))^m & &
 \end{array} \tag{1.7}$$

donde $(\gamma_i \circ (R\varphi^*|_{V_i} \times \text{id}))^m$ es el morfismo correspondiente a $\gamma_i \circ (R\varphi^*|_{V_i} \times \text{id})$ por definición del esquema de m -jets de U_i .

Recordemos de la eq. (1.6) que γ_i es el único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & \alpha|_{f^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1})} & \\
 & \curvearrowright & \\
 f^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\gamma_i} & U_i \hookrightarrow X
 \end{array}$$

Ahora, calcularemos $(\gamma_i \circ (R\varphi^*|_{V_i} \times \text{id}))^m$ analizando el siguiente morfismo:

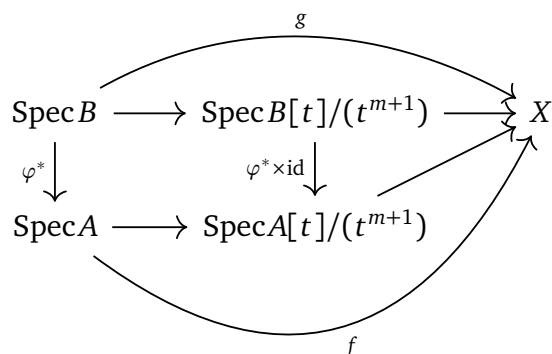
$$((\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))^m)|_{V_i}.$$

La función f de la eq. (1.5) para la construcción del morfismo $(\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))^m$ la denotamos por g , es decir, es el morfismo:

$$g : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B[t]/(t^{m+1}) \xrightarrow{\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id})} X.$$

Se deduce que $V_i = (\varphi^*)^{-1}(f^{-1}(U_i)) = g^{-1}(U_i)$ desde el siguiente del diagrama conmutativo:

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos



Por lo tanto,

$$(\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))^m|_{V_i} = ((\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))^m)|_{g^{-1}(U_i)}.$$

El morfismo γ_i de la eq. (1.5) para la construcción del morfismo $(\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))^m$ lo denotamos por ϵ_i , es decir, es el único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & (\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))|_{g^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1})} \\ & \searrow & \nearrow \\ g^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\epsilon_i} & U_i \hookrightarrow X \end{array}$$

(1.8)

Como $V_i = (\varphi^*)^{-1}(f^{-1}(U_i))$, tenemos que:

$$\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id})|_{V_i \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1})} = \alpha|_{f^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1})} \circ (R\varphi^* \times \text{id}).$$

Con esto, extendemos el diagrama 1.8 al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & (\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))|_{g^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1})} \\ & \searrow & \nearrow \\ g^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) & \xrightarrow{\epsilon_i} & U_i \hookrightarrow X \\ & \searrow R\varphi^* \times \text{id} & \nearrow \alpha|_{f^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1})} \\ & & f^{-1}(U_i) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) \\ & & \uparrow \gamma_i \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\epsilon_i = \gamma_i \circ (R\varphi^* \times \text{id}).$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Recordemos que, por construcción de $(\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))^m$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{(\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))^m|_{g^{-1}(U_i)}} & \\
 g^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\epsilon_i^m} & U_{i,m} \longrightarrow Y
 \end{array}$$

Como $V_i = g^{-1}(U_i)$, comparando este diagrama conmutativo con el diagrama 1.7, concluimos que

$$(\alpha \circ (\varphi^* \times \text{id}))^m|_{V_i} = \alpha^m \circ \varphi^*|_{V_i}.$$

Por lo tanto η es el isomorfismo natural buscado.

Finalmente, concluimos que el esquema de m -jets de X existe. □

De la construcción anterior, podemos deducir que π_m^X es un morfismo afín. Este resultado lo utilizaremos en la siguiente sección.

Proposición 1.1.31

Sea X un esquema de tipo finito sobre un cuerpo k . El morfismo de proyección canónica $\pi_m : X_m \rightarrow X$ es un morfismo afín para todo entero $m \geq 0$.

Demostración. Sea $U \subseteq X$ un abierto afín. Como X es de tipo finito, U es afín de tipo finito. La preimagen $\pi_m^{-1}(U)$ es isomorfo al esquema afín U_m^{aff} del corolario 1.1.23 porque ambos son el esquema de m -jets de U (ver el corolario 1.1.28, y proposición 1.1.13 para la unicidad). Concluyendo que $\pi_m^{-1}(U)$ es afín. Por lo tanto, el morfismo π_m es afín. □

1.2. Los espacios de arcos

El objetivo de esta sección es presentar la existencia de un espacio, llamado espacio de arcos, que codifica la información de ciertos morfismos, denominados arcos. El **espacio de arcos** de un esquema X sobre un cuerpo k , de manera similar al espacio de m -jet, es un espacio tal que cada K -punto corresponde a un **arco**, un morfismo

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

de la forma $\text{Spec}K[[t]] \rightarrow X$ para K una extensión de k . Es denotado por X_∞ , y se define como el límite proyectivo de los esquemas de m -jets para el sistema proyectivo formado por las proyecciones canónicas $\pi_{m,p} : X_m \rightarrow X_p$.

1.2.1. Definición y existencia de los espacios de arcos

Como establecimos previamente, un arco se define como:

Definición 1.2.1

Sea X un esquema sobre un cuerpo k . Un **arco sobre X** es un morfismo de la forma $\alpha : K[[t]] \rightarrow X$ para alguna extensión K del cuerpo k .

En esta subsección, probaremos que el espacio de arcos, que definiremos nuevamente, existe como límite proyectivo. En la siguiente subsección, mostraremos su relación con los arcos.

Definición 1.2.2

Sea X un esquema de tipo finito sobre un cuerpo k . El **espacio de arcos**, X_∞ , del esquema X se define como:

$$X_\infty = \varprojlim_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} X_m,$$

para el sistema proyectivo formado por las proyecciones canónicas.

En la literatura, este espacio también es denotado como $J_\infty(X)$ o $\mathcal{L}(X)$.

Para mostrar su existencia y que la definición está bien fundada, verificaremos que el sistema formado por las proyecciones canónicas es un sistema proyectivo.

Proposición 1.2.3

Sea X un esquema de tipo finito sobre un cuerpo k . El sistema formado por las proyecciones canónicas, $\{\pi_{m,p} : X_m \rightarrow X_p\}_{p \leq m}$, es un sistema proyectivo.

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Demostración. Es directo de la definición 1.1.25 que $\pi_{m,m}$ es la identidad. Por lo tanto, solo basta verificar que $\pi_{p,q} \circ \pi_{m,p} = \pi_{m,q}$ para comprobar que es un sistema proyectivo. Lo haremos utilizando la definición equivalente, que se presenta después de la definición 1.1.25, como un morfismo $\pi_{m,p}(S)$ en los S -puntos de X_m . Es decir, basta probar que la aplicación $\pi_{p,q}(S) \circ \pi_{m,p}(S)$ es igual a la aplicación $\pi_{m,q}(S)$.

Sea x un S -punto de X_m . El S -punto $\pi_{p,q}(\pi_{m,p}(x))$ de X_q corresponde al q -jet:

$$S \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{q+1}) \rightarrow S \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{p+1}) \rightarrow S \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X.$$

En otras palabras, es la q -truncación de la p -truncación del m -jet $S \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$. Que no es otra que su q -truncación:

$$S \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{q+1}) \rightarrow S \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X.$$

Por lo tanto, se asocian al mismo S -punto $\pi_{m,p}(x)$. Concluyendo que $\pi_{p,q}(S) \circ \pi_{m,p}(S) = \pi_{m,q}(S)$.

Mostrando que es un sistema proyectivo. □

A pesar de tener un sistema proyectivo, la categoría **Sch**/ k no contiene todos sus límites proyectivos. Sin embargo, existe si los morfismos del sistema son afines.

Proposición 1.2.4

Sea X un esquema de tipo finito sobre un cuerpo k . Los morfismos de proyección canónica $\pi_{m,p} : X_m \rightarrow X_p$ son afines.

Demostración. Sea $X = \bigcup_i U_i$ un cubrimiento de abiertos afines. Luego, $X_p = \bigcup_i \pi_p^{-1}(U_i)$ es un cubrimiento de abiertos afines porque π_p es un morfismo afín (ver la proposición 1.1.31). Para probar que $\pi_{m,p}$ es un morfismo afín, basta probar que los esquemas $\pi_{m,p}^{-1}(\pi_p^{-1}(U_i))$ son afines. Como es un sistema proyectivo: $\pi_p \circ \pi_{m,p} = \pi_m$ (ver la proposición 1.2.3), se concluye que $\pi_{m,p}^{-1}(\pi_p^{-1}(U_i))$ es el abierto afín $\pi_m^{-1}(U_i)$. □

En particular, el límite proyectivo del sistema existe, y sus morfismos de proyección los denotamos por $\pi_{\infty,m}^X : X_\infty \rightarrow X_m$.

1.2.2. Los espacios de arcos como representantes

De manera similar que los esquemas de m -jets, los espacios de arcos son el representante de cierto funtor contravariante, F_∞ . Este funtor nos permite codificar la información de los arcos y sus familias sobre el espacio.

Definición 1.2.5

Sea X un esquema sobre un cuerpo k . Se define el funtor contravariante $F_\infty^X : \mathbf{Sch}/k \rightarrow \mathbf{Set}$ como:

$$F_\infty^X(Z) = \text{Hom}(Z \widehat{\times}_{\text{Spec } k} \text{Spec } k[[t]], X),$$

donde $\widehat{\times}_{\text{Spec } k}$ es la completación formal sobre $Z \times_{\text{Spec } k} \{0\}$.

Cuando el esquema X es claro por el contexto, lo denotamos simplemente como F_∞ .

El espacio de arcos se define, en general, y no solo para los esquemas de tipo finito sobre un cuerpo k , como el representante del funtor F_∞^X . Nos basta nuestra definición como límite proyectivo para el contexto de singularidades, ya que estamos interesados en el caso en que X es una variedad algebraica sobre un cuerpo k . En particular, cuando X es una variedad singular o cuando es el espacio de una resolución de singularidades.

Al reducirnos al caso afín, obtenemos el siguiente isomorfismo natural:

$$F_m|_{\text{Aff}_k}(\text{Spec } A) \cong \text{Hom}_{\text{Sch}/k}(\text{Spec } A[[t]], X),$$

para todas las k -álgebras A .

Proposición 1.2.6

Sea X un esquema de tipo finito sobre un cuerpo k . El espacio de arcos de X , X_∞ , es el cuasi-representante del funtor $F_m|_{\text{Aff}_k}$, es decir, existe un isomorfismo natural:

$$\text{Hom}(\text{Spec } A[[t]], X) \cong \text{Hom}(\text{Spec } A, X_\infty),$$

para todas las k -álgebras A .

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Demostración. Sea A una k -álgebra. El resultado se sigue de las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}A[[t]], X) &\cong \mathrm{Hom}(\varinjlim_m \mathrm{Spec}A[t]/(t^{m+1}), X) \\
 &\cong \varprojlim_m \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}A[t]/(t^{m+1}), X) \\
 &\cong \varprojlim_m \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}A, X_m) \\
 &\cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}A, \varprojlim_m X_m) \\
 &\cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}A, X_\infty).
 \end{aligned}$$

□

Aquella proposición nos permite deducir que los arcos $\alpha : K[[t]] \rightarrow X$ están en correspondencia con los K -puntos de X_∞ .

Observación 1.2.7. En general, para un esquema Z sobre k , se define $Z[[t]] = \varinjlim_m (Z \times_{\mathrm{Spec}k} \mathrm{Spec}k[t]/(t^{m+1}))$. El límite existe, y es $Z[[t]] = Z \widehat{\times}_{\mathrm{Spec}k} \mathrm{Spec}k[[t]]$ donde $\widehat{\times}$ es la completación formal sobre $Z \times \{0\}$ del producto fibrado.

Adaptando la demostración anterior, existe un isomorfismo natural:

$$\mathrm{Hom}(Z[[t]], X) \cong \mathrm{Hom}(Z, X_\infty),$$

para todos los esquemas Z sobre k .

Por lo tanto, el espacio de arcos, X_∞ , es el representante del funtor F_∞^X .

Desde este punto de vista, podemos describir los morfismos de proyección, $\pi_{\infty, m}^X : X_\infty \rightarrow X_m$ utilizando el funtor de puntos:

Sea X un S -punto de X_∞ . Sea $\alpha : S \widehat{\times}_{\mathrm{Spec}k} \mathrm{Spec}k[[t]] \rightarrow X$ su arco asociado. Se define $\pi_{\infty, m}^X(y)$ como el S -punto de X_m correspondiente al m -jet $S \times_{\mathrm{Spec}k} \mathrm{Spec}k[t]/t^{m+1} \rightarrow X$ determinado por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 s \times \sum_{j=0}^m a_j t^j & \longleftarrow & s \times \sum_{j \geq 0} a_j t^j \\
 S \times_{\mathrm{Spec}k} \mathrm{Spec}k[t]/(t^{m+1}) & \longrightarrow & S \widehat{\times}_{\mathrm{Spec}k} \mathrm{Spec}k[[t]] \\
 & \searrow & \downarrow \alpha \\
 & & X
 \end{array}$$

De esta manera, definimos la transformación $\pi_{\infty, m}^X(S) : Y_\infty(S) \rightarrow X_m(S)$ natural sobre los esquemas S sobre k . Por el lema de Yoneda, $\mathrm{Nat}(X_\infty(-), X_m(-)) \cong$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

$\text{Hom}(X_\infty, X_m)$, le corresponde un único morfismo, y es $\pi_{\infty, m}^X : X_\infty \rightarrow X_m$.

Un morfismo de proyección destacado es el siguiente:

Definición 1.2.8

Sea X un esquema sobre un cuerpo k . Se define el **morfismo de proyección canónica** $\pi_\infty^X : X_\infty \rightarrow X$ como $\pi_{\infty, 0}^X$.

Para un punto $x \in X_\infty$, su imagen $\pi_\infty^X(x)$ se describe de la siguiente manera: sea $\alpha : \text{Spec } \kappa(x)[[t]] \rightarrow X$ el arco correspondiente al punto x . Consideremos el 0-jet $\text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$ determinado por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 a_0 & \longleftarrow & \sum_{j \geq 0} a_j t^j \\
 \text{Spec } \kappa(x) & \longrightarrow & \text{Spec } \kappa(x)[[t]] \\
 & \searrow & \downarrow \alpha \\
 & & X
 \end{array}$$

Este define un $\kappa(x)$ -punto de X . El punto $\pi_\infty^X(x)$ es su punto subyacente, es decir, la imagen de $\text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$. Este punto también lo denotaremos por $\alpha(0)$ por ser la imagen de su único punto (0) .

Proposición 1.2.9

El morfismo de proyección canónica, π_∞^X , es sobreyectivo.

Demostración. Sea p un punto de X . Sea $\text{Spec } \kappa(p) \rightarrow X$ su $\kappa(p)$ -punto asociado. Componiendo por el morfismo constante $\kappa(x) \rightarrow \kappa(p)[[t]]$, obtenemos un arco:

$$\beta : \text{Spec } \kappa(p)[[t]] \rightarrow \text{Spec } \kappa(p) \rightarrow X.$$

Sea x el punto subyacente al $\kappa(p)$ -punto de X_∞ asociado a β .

Luego, el arco β se factoriza por el arco asociado a x , que denotamos por α , de la siguiente manera:

$$\beta : \text{Spec } \kappa(p)[[t]] \rightarrow \text{Spec } \kappa(x)[[t]] \xrightarrow{\alpha} X.$$

1 Los esquemas de jets y los espacios de arcos

Concluyendo que $\alpha(0) = \beta(0) = x$.

Recordemos que $\pi_{\infty}^X(x) = \alpha(0)$. Por lo tanto, existe un punto $x \in X_{\infty}$ tal que $\pi_{\infty}^X(x) = p$. \square

2 Grafos de componentes de Jets

El estudio de los esquemas de jets ha demostrado ser una herramienta fundamental en la geometría algebraica moderna, particularmente en la teoría de singularidades. Las componentes irreducibles de los esquemas de jets de una variedad singular no son meros objetos algebraicos, sino que codifican información profunda sobre la geometría de sus resoluciones de singularidades y la naturaleza estructural de la singularidad misma.

Para extraer y visualizar esta información topológica y geométrica, introducimos el concepto de grafo de componentes de jets.

Definición 2.0.1: [[Mou23](#)]

El **grafo de componentes de jets** de una variedad algebraica S es un grafo dirigido, nivelado y con pesos, que se construye de la siguiente manera:

- **Vértices:** Cada componente irreducible de los esquemas de jets S_m (para $m \geq 1$) se representa como un vértice $v_{i,m}$. El subíndice m indica el nivel del vértice en el grafo.
- **Aristas:** Se traza una arista dirigida desde un vértice del nivel $m + 1$, digamos $v_{i_1,m+1}$, hacia un vértice del nivel m , $v_{i_0,m}$, si el morfismo de truncamiento natural $\pi_{m+1,m} : S_{m+1} \rightarrow S_m$ induce un morfismo dominante entre las componentes irreducibles correspondientes.
- **Pesos:** Cada vértice está pesado (o etiquetado) por la dimensión geométrica de la componente irreducible que representa.

La topología de este grafo es un invariante sumamente fino de la singularidad, como lo demuestran los siguientes resultados recientes:

Proposición 2.0.2: [Mou17]

Dos superficies tóricas normales son isomorfas si y solo si tienen el mismo grafo de componentes de jets.

Proposición 2.0.3: [CM21]

Sea $(S, 0)$ una singularidad de hipersuperficie cuasi-ordinaria de dimensión 2. Un subgrafo canónico del grafo de componentes de jets de $(S, 0)$ determina su tipo topológico incrustado, y viceversa.

2.1. Esquema de jets de variedades singulares

Sea X una variedad algebraica. La geometría del esquema de jets X_m de orden m sobre X puede ser entendida analizando su comportamiento sobre el lugar regular y suave de la base. En particular, tenemos la descomposición natural:

$$X_m = \pi_m^{-1}(X^{\text{sing}}) \cup \overline{\pi_m^{-1}(X^{\text{reg}})}, \quad (2.1)$$

donde $\pi_m : X_m \rightarrow X$ es el morfismo de proyección natural, X^{sing} es el lugar singular de X , y X^{reg} es su lugar regular. La clausura de Zariski $\overline{\pi_m^{-1}(X^{\text{reg}})}$ se denomina frecuentemente como la **componente principal** (o componente general) de X_m .

El comportamiento de los esquemas de jets sobre variedades lisas es bien conocido y estructuralmente simple, lo cual fundamenta el análisis de la ecuación (2.1):

Proposición 2.1.1: [Mus01b]

Si X es una variedad algebraica de dimensión r sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, y si X es no singular, entonces su esquema de m -jets, X_m , es un fibrado localmente trivial con fibra \mathbb{A}^{rm} sobre X . En particular, X_m es irreducible y tiene dimensión $(m + 1)r$.

Cuando X es singular, X_m ya no es necesariamente irreducible, y las componentes extras provienen de $\pi_m^{-1}(X^{\text{sing}})$ puesto que $\pi_m^{-1}(X^{\text{reg}}) \cong X_m^{\text{reg}}$. Mustařa establece un cri-

terio preciso para determinar la irreducibilidad en el caso de intersecciones completas locales:

Proposición 2.1.2: [Mus01b]

Si X es una variedad localmente de intersección completa de dimensión r y m es un número entero positivo, entonces su esquema de m -jets, X_m , es irreducible si y solo si

$$\dim \pi_m^{-1}(X^{\text{sing}}) < (m + 1)r.$$

2.2. Jets por derivadas formales

Para llevar a cabo cálculos explícitos de las componentes irreducibles, es indispensable una descripción algebraica de los esquemas de jets en términos de ideales y derivaciones.

A lo largo de este capítulo, asumiremos que k es una extensión del cuerpo de los números racionales \mathbb{Q} .

Sea B un conjunto finito de variables y consideremos el anillo de polinomios $k[v]_{v \in B}$. Sea $f \in k[v]_{v \in B}$ un polinomio. Al reemplazar las variables $v \in B$ por series formales de potencias en una variable t , es decir, $v(t) = v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \dots$, podemos expresar f como una serie formal en t :

$$f(t) = f^{(0)} + f^{(1)} t + f^{(2)} t^2 + f^{(3)} t^3 + \dots,$$

donde los coeficientes $f^{(m)}$ pertenecen al anillo de polinomios $k[v_i \mid \substack{v \in B \\ i=0, \dots, m}]$.

Sea $X = \text{Spec } k[v]_{v \in B}/I$ un esquema afín, donde I es un ideal. Para todo entero $m \geq 0$, recordemos de la proposición 1.1.21 que su esquema de m -jets, X_m , se define, salvo isomorfismo, como:

$$X_m = \text{Spec} \left(\frac{k[v_i \mid \substack{v \in B \\ i=0, \dots, m}]}{(f^{(0)}, \dots, f^{(m)})_{f \in I}} \right).$$

Definimos $I^{(u)}$ como el ideal generado por los coeficientes $\{f^{(u)} \mid f \in I\}$ para todo $u \geq 0$. Consecuentemente, el ideal que define al esquema de m -jets se denota como:

$$I_m = I^{(0)} + I^{(1)} + \dots + I^{(m)}, \quad \text{para todo } m \geq 0.$$

2 Grafos de componentes de Jets

Por lo tanto, la representación algebraica del esquema de m -jets de X es:

$$X_m = \text{Spec} \left(\frac{k[v_i \mid \substack{v \in B \\ i=0, \dots, m}]}{I_m} \right).$$

Notemos que si f_1, \dots, f_s conforman un conjunto finito de generadores del ideal I , entonces el ideal I_m está finitamente generado por $f_1^{(0)}, \dots, f_s^{(0)}, \dots, f_1^{(m)}, \dots, f_s^{(m)}$.

2.2.1. Derivadas de Hasse-Schmidt

La operación que asocia a cada f el polinomio $f^{(u)}$ se formaliza mediante la teoría de derivaciones de orden superior de Hasse-Schmidt.

Proposición 2.2.1

Sean $f, g \in k[v]_{v \in B}$. Entonces, para todo $u = 0, 1, 2, \dots$, se satisfacen las siguientes propiedades:

1. **Linealidad:** $(f + g)^{(u)} = f^{(u)} + g^{(u)}$.
2. **Regla de Leibniz generalizada:** $(fg)^{(u)} = \sum_{i+j=u} f^{(i)} g^{(j)}$.
3. **Anulación en constantes:** Si $u \geq 1$, entonces $c^{(u)} = 0$ para todo $c \in k$.
4. **Término inicial:** El polinomio $f^{(0)}$ es el resultado del cambio de variables de v por v_0 en f .
5. **Variables simples:** $v^{(u)} = v_u$ para toda variable $v \in B$.

Demostración. Solo demostraremos la regla de Leibniz generalizada. Su demostración se obtiene de la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} (fg)(t) &= f(t)g(t) = (f^{(0)} + f^{(1)}t + \dots)(g^{(0)} + g^{(1)}t + \dots) \\ &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} f^{(i)} g^{(j)} t^{i+j} \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left(\sum_{i+j=u} f^{(i)} g^{(j)} \right) t^u. \end{aligned}$$

□

2 Grafos de componentes de Jets

Ejemplo 2.2.2. Consideremos la singularidad plana dada por $f = y^3 - x^2$. Desarrollando la serie $f(t) = y(t)^3 - x(t)^2$, obtenemos los polinomios de jets:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= y_0^3 - x_0^2 \\
 &\quad + (3y_0^2y_1 - 2x_0x_1)t \\
 &\quad + (3y_0y_1^2 + 3y_0^2y_2 - x_1^2 - 2x_0x_2)t^2 \\
 &\quad + (y_1^3 + 6y_0y_1y_2 + 3y_0^2y_3 - 2x_1x_2 - 2x_0x_3)t^3 \\
 &\quad + (3y_1^2y_2 + 3y_0y_2^2 + 6y_0y_1y_3 + 3y_0^2y_4 - x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_0x_4)t^4 \\
 &\quad + (3y_1y_2^2 + 3y_1^2y_3 + 6y_0y_2y_3 + 6y_0y_1y_4 + 3y_0^2y_5 - 2x_2x_3 - 2x_1x_4 - 2x_0x_5)t^5 \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

Cada uno de los términos entre paréntesis corresponde a $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$, respectivamente.

Para potencias puras, la derivada de Hasse-Schmidt puede calcularse mediante fórmulas combinatorias explícitas.

Proposición 2.2.3

Para toda variable $v \in B$, y para todo par de enteros $\ell \geq 1$ y $u \geq 0$, se cumple que:

$$(v^\ell)^{(u)} = \sum_{\alpha \in A_{u,\ell}} \frac{\ell!}{\alpha_0! \cdots \alpha_u!} v_0^{\alpha_0} \cdots v_u^{\alpha_u},$$

donde el conjunto $A_{u,\ell}$ se define a partir del conjunto $P_{u,\ell}$ de particiones ordenadas de u de longitud ℓ :

$$\begin{aligned}
 P_{u,\ell} &:= \{(p_1, \dots, p_\ell) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell \mid p_1 + \dots + p_\ell = u, p_1 \leq \dots \leq p_\ell\}, \\
 A_{u,\ell} &:= \{(\alpha_0, \dots, \alpha_u) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{u+1} \mid q^{p_1 + \dots + p_\ell} = \alpha_0 + \alpha_1 q + \dots + \alpha_u q^u \in \mathbb{Z}[q]\}^{(p_1, \dots, p_\ell) \in P_{u,\ell}}.
 \end{aligned}$$

2 Grafos de componentes de Jets

Demostración. Aplicando repetidamente la regla de Leibnitz generalizada,

$$\begin{aligned}
 (v^\ell)^{(u)} &= \sum_{i+p_\ell=u} (v^{\ell-1})^{(i)} v^{(p_\ell)} \\
 &= \sum_{i+p_\ell=u} \sum_{j+p_{\ell-1}=i} (v^{\ell-2})^{(j)} v^{(p_{\ell-1})} v^{(p_\ell)} \\
 &= \sum_{j+p_{\ell-1}+p_\ell=u} (v^{\ell-2})^{(j)} v^{(p_{\ell-1})} v^{(p_\ell)} \\
 &\quad \vdots \\
 &= \sum_{p_1+\dots+p_\ell=u} v^{(p_1)} \dots v^{(p_\ell)} \\
 &= \sum_{p_1+\dots+p_\ell=u} v_{p_1} \dots v_{p_\ell} \\
 &= \sum_{\substack{p_1+\dots+p_\ell=u \\ p_1 \leq \dots \leq p_\ell}} \#\{(p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(\ell)}) \mid \sigma \in S_\ell\} v_{p_1} \dots v_{p_\ell} \\
 &= \sum_{\substack{p_1+\dots+p_\ell=u \\ p_1 \leq \dots \leq p_\ell \\ v_1^{\alpha_1} \dots v_u^{\alpha_u} = v_{p_1} \dots v_{p_\ell}}} \frac{\ell!}{\alpha_0! \dots \alpha_u!} v_1^{\alpha_1} \dots v_u^{\alpha_u} \\
 &= \sum_{\alpha \in A_{u,\ell}} \frac{\ell!}{\alpha_0! \dots \alpha_u!} v_0^{\alpha_0} \dots v_u^{\alpha_u}.
 \end{aligned}$$

donde S_ℓ es el grupo de permutaciones de ℓ elementos. □

Ejemplo 2.2.4. Calculemos explícitamente el término $(y^3)^{(5)}$. Las particiones de $u = 5$ en $\ell = 3$ partes, sus polinomios generadores, el monomio resultante y el coeficiente multinomial asociado se resumen en la siguiente tabla:

$P_{5,3}$	$A_{5,3}$ (Polinomio en q)	Monomio	Coeficiente
(1, 2, 2)	$q^1 + 2q^2$	$y_1 y_2^2$	$\frac{3!}{1!2!} = 3$
(1, 1, 3)	$2q^1 + q^3$	$y_1^2 y_3$	$\frac{3!}{2!1!} = 3$
(0, 2, 3)	$q^0 + q^2 + q^3$	$y_0 y_2 y_3$	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$
(0, 1, 4)	$q^0 + q^1 + q^4$	$y_0 y_1 y_4$	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$
(0, 0, 5)	$2q^0 + q^5$	$y_0^2 y_5$	$\frac{3!}{2!1!} = 3$

Sumando todos los términos, recuperamos el polinomio:

$$(y^3)^{(5)} = 3y_1y_2^2 + 3y_1^2y_3 + 6y_0y_2y_3 + 6y_0y_1y_4 + 3y_0^2y_5.$$

2.2.2. El operador diferencial hs

La determinación explícita de las componentes irreducibles de X_m (y por ende, de los vértices y aristas del grafo de componentes de jets) requiere calcular los primos minimales asociados al ideal I_m . Dado que el cálculo directo de bases de Gröbner para estos ideales resulta computacionalmente exhaustivo a medida que m crece, resulta imperativo desarrollar un enfoque algorítmico más eficiente.

Como aportación metodológica original de este trabajo, introducimos los operadores diferenciales hs y hq . Estas herramientas permiten generar, evaluar y controlar los corrimientos de índices de las derivadas de Hasse-Schmidt de manera recursiva, eludiendo la explosión combinatoria del cálculo directo.

Sea M un monomio en el anillo $k[v_i \mid i=0,1,2,\dots]$. Existe un entero $\ell \geq 1$ suficientemente grande tal que para toda variable $v \in B$ existe una tupla $\alpha(v) := (\alpha_1(v), \dots, \alpha_\ell(v)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell$ que permite expresar M como:

$$M = \prod_{v \in B} v_1^{\alpha_1(v)} \dots v_\ell^{\alpha_\ell(v)}.$$

Definimos el coeficiente combinatorio del monomio, $c(M)$, como:

$$c(M) := \prod_{v \in B} \frac{(\alpha_1(v) + \dots + \alpha_\ell(v))!}{\alpha_1(v)! \dots \alpha_\ell(v)!}.$$

Consideremos la derivación $D(M) := \sum_{v \in B} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial M}{\partial v_i} v_{i+1}$. Al aplicar D a M , obtenemos una combinación lineal de monomios distintos a pares $\dot{M}_1, \dots, \dot{M}_n$:

$$D(M) = \sum_{k=1}^n c_k \dot{M}_k, \quad \text{con } c_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Definimos además $p(M)$ como el número total de variables v_i (con $i > 0$) que aparecen con potencia $\alpha_i(v)$ positiva en M . Con estos elementos, definimos el operador

2 Grafos de componentes de Jets

fundamental hs aplicado a un monomio M como una corrección de los coeficientes de $D(M)$:

$$hs(M) = \frac{1}{c(M)} \sum_{k=1}^n \frac{c(\dot{M}_k)}{p(\dot{M}_k)} \dot{M}_k.$$

Extendiendo hs de manera lineal al espacio de polinomios y asumiendo $hs(c) = 0$ para todo $c \in k$, obtenemos un endomorfismo k -lineal sobre $k[v_i \mid i=0,1,2,\dots]$.

Ejemplo 2.2.5. Evaluación directa de hs :

1. $hs(x_1^3 y_0 + y_3) = \frac{3}{2} x_1^2 x_2 y_0 + \frac{1}{2} x_1^3 y_1 + y_4.$

2. Comparación entre hs y la derivación D :

Operador hs	Derivación D
$hs(x_0^2) = 2x_0 x_1$	$D(x_0^2) = 2x_0 x_1$
$hs(2x_0 x_1) = x_1^2 + 2x_0 x_2$	$D(2x_0 x_1) = 2x_1^2 + 2x_0 x_2$

La gran utilidad de este operador radica en que genera la sucesión de derivadas de Hasse-Schmidt iterativamente:

Proposición 2.2.6

Sea $f \in k[v]_{v \in B}$. Entonces, $f^{(0)}$ es el polinomio resultante de sustituir en f cada variable v por v_0 . Además, los términos $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$ se obtienen aplicando iterativamente el operador hs :

$$f^{(u)} = hs^u(f^{(0)}), \quad \text{para todo } u \geq 0.$$

Ejemplo 2.2.7. Recordemos del ejemplo previo que, para $f = y^3 - x^2$, teníamos:

$$f^{(2)} = 3y_0 y_1^2 + 3y_0^2 y_2 - x_1^2 - 2x_0 x_2,$$

$$f^{(3)} = y_1^3 + 6y_0 y_1 y_2 + 3y_0^2 y_3 - 2x_1 x_2 - 2x_0 x_3.$$

Utilizando la proposición y aplicando la linealidad del operador, comprobamos

que $hs(f^{(2)}) = f^{(3)}$:

$$\begin{aligned} hs(f^{(2)}) &= hs(3y_0y_1^2 + 3y_0^2y_2 - x_1^2 - 2x_0x_2) \\ &= 3 \overbrace{\left(\frac{1}{3}y_1^3 + y_0y_1y_2\right)}^{hs(y_0y_1^2)} + 3 \overbrace{(y_0y_1y_2 + y_0^2y_3)}^{hs(y_0^2y_2)} - \overbrace{(x_1x_2)}^{hs(x_1^2)} - 2 \overbrace{\left(\frac{1}{2}x_1x_2 + x_0x_3\right)}^{hs(x_0x_2)} \\ &= y_1^3 + 6y_0y_1y_2 + 3y_0^2y_3 - 2x_1x_2 - 2x_0x_3. \end{aligned}$$

2.2.3. El operador con pesos hq

Para controlar la evaluación en subvariedades singulares (por ejemplo, evaluando $x_0 = 0$), es útil introducir una variable auxiliar q que registre los desplazamientos de los índices de las variables.

Definimos el operador $hq : k[v_i \mid_{i=0,1,2,\dots}^{v \in B}][q] \rightarrow k[v_i \mid_{i=0,1,2,\dots}^{v \in B}][q]$ como la única extensión k -lineal de hs que satisface:

1. $hq(f) = hs(f)$, para todo $f \in k[v_i \mid_{i=0,1,2,\dots}^{v \in B}]$.
2. $hq(qf) = f$, para todo polinomio $f \in k[v_i \mid_{i=0,1,2,\dots}^{v \in B}][q]$. Es decir, el operador disminuye una q .

Este operador permite realizar evaluaciones anidadas y corrimientos de índices algebraicamente controlados, como establece la siguiente identidad:

Proposición 2.2.8

Sea $f_0 \in k[v_0]_{v \in B}$. Para todo entero $u \geq 0$ y una variable elegida $x \in B$, se cumple la siguiente identidad de evaluación:

$$hs^u(f_0)|_{x_0=0} = hq^u(f_0|_{x_0=qx_0}|_{S_-})|_{S_+}|_{q=0},$$

donde S_- es la sustitución de desplazamiento de los índices a la izquierda $\{x_1 = x_0, x_2 = x_1, x_3 = x_2, \dots\}$ y S_+ es la sustitución de desplazamiento de los índices a la derecha $\{\dots, x_3 = x_4, x_2 = x_3, x_1 = x_2, x_0 = x_1\}$.

2 Grafos de componentes de Jets

Demostración. Recordemos que la serie formal de un polinomio f se relaciona con el operador hs por la siguiente igualdad:

$$f(t) = f^{(0)} + hs(f^{(0)})t + hs^2(f^{(0)})t^2 + \dots,$$

donde el polinomio $f^{(0)}$ es el resultado del cambio de variables de v por v_0 en f .

Por la linealidad, podemos asumir que f es un monomio.

Como $x_0 = 0$, tenemos que:

$$x(t) = t(x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \dots).$$

Sea a el grado de x en el monomio f , es decir, x^a aparece en f con a maximal. Aplicar el desplazamiento de los índices a la izquierda es equivalente a sustituir la variable x por la serie formal:

$$x(t) = t(x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots).$$

Si aplicamos esta sustitución, entonces

$$f(t) = f^{(0)} t^a + hs(f^{(0)}) t^{a+1} + hs^2(f^{(0)}) t^{a+2} + \dots$$

Concluyendo que:

$$hs^u(f^{(0)})|_{x_0=0} = hs^{u-a}(f^{(0)}|_{s_-})|_{s_+}.$$

definiendo $hs^{u-a}(f) = 0$ cuando $u - a < 0$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} hs^u(f^{(0)})|_{x_0=0} &= hs^{u-a}(f^{(0)}|_{s_-})|_{s_+} \\ &= hq^u(q^a f^{(0)}|_{s_-})|_{s_+}|_{q=0} \\ &= hq^u(f^{(0)}|_{x_0=qx_0}|_{s_-})|_{s_+}|_{q=0}. \end{aligned}$$

Concluimos el resultado por la linealidad de hs , hq y las sustituciones.

□

Ejemplo 2.2.9. Evaluemos el término para $f_0 = y_0^3 - x_0^2$ en el nivel $u = 2$:

Evaluación directa de hs	Método del operador hq
$hs^2(f_0) = 3y_0y_1^2 + 3y_0^2y_2 - x_1^2 - 2x_0x_2$	$hq^2(q^3y_0^3 - q^2x_0^2) _{s_+} = qy_1^3 - x_1^2$
$hs^2(f_0) _{\substack{x_0=0 \\ y_0=0}} = -x_1^2$	$hq^2(q^3y_0^3 - q^2x_0^2) _{s_+} _{q=0} = -x_1^2$

2.3. Ejemplos con hipersuperficies singulares

Supongamos que conocemos la descomposición en componentes irreducibles en el nivel m , es decir, el radical del ideal I_m se descompone como la intersección de ideales primos minimales:

$$\sqrt{I_m} = P_1 \cap \dots \cap P_n.$$

Geoméricamente, esto equivale a la descomposición de $X_m = V(P_1) \cup \dots \cup V(P_n)$ en componentes irreducibles. Para pasar al nivel $m + 1$, empleamos propiedades de radicales:

$$\begin{aligned} \sqrt{I_{m+1}} &= \sqrt{I_m + I^{(m+1)}} \\ &= \sqrt{\sqrt{I_m} + \sqrt{I^{(m+1)}}} \\ &= \sqrt{(P_1 \cap \dots \cap P_n) + \sqrt{I^{(m+1)}}} \\ &= \sqrt{(P_1 + I_{m+1}) \cap \dots \cap (P_n + I^{(m+1)})} \\ &= \sqrt{P_1 + I^{(m+1)}} \cap \dots \cap \sqrt{P_n + I^{(m+1)}}. \end{aligned}$$

2.3.1. Ejemplo de la cúspide

Apliquemos la maquinaria de los operadores hq y hs , junto con los radicales iterados, para estudiar los jets concentrados en la singularidad de la cúspide plana X definida por $f = y_0^3 - x_0^2$.

Nuestro objetivo es analizar la fibra sobre el lugar singular, es decir, el espacio $\pi_m^{-1}(X^{\text{sing}})$. Dado que la única singularidad se encuentra en el origen, evaluaremos iterativamente en $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

2 Grafos de componentes de Jets

Para rastrear el término dominante (el generador principal del ideal en cada nivel) empleamos una filtración con la variable auxiliar q , donde asignamos pesos s_y, s_x de modo que realizamos la sustitución $v_0 = q^{s_y} v_{s_y+1}$. En la siguiente tabla registramos el nivel u , la acción del operador hq^u , los desplazamientos y la estabilización vía la Proposición 2.2.3:

u	$v_0 = q^{s_y} v_{s_y+1}$	s_y	s_x	Término desplazado S_+	$q = 0$	$\sqrt{\text{Ideal de la componente}}$
0	$y_0^3 - x_0^2$	0	0	$y_0^3 - x_0^2$	$y_0^3 - x_0^2$	$(y_0^3 - x_0^2)$
0	$q^3 y_0^3 - q^2 x_0^2$	1	1	$q^3 y_1^3 - q^2 x_1^2$	0	(x_0, y_0)
1	$q^2 y_0^3 - q x_0^2$	1	1	$q^2 y_1^3 - q x_1^2$	0	(x_0, y_0)
2	$q y_0^3 - x_0^2$	1	1	$q y_1^3 - x_1^2$	$-x_1^2$	(x_0, y_0, x_1)
2	$q y_0^3 - q^2 x_0^2$	1	2	$q y_1^3 - q^2 x_2^2$	0	(x_0, y_0, x_1)
3	$y_0^3 - q x_0^2$	1	2	$y_1^3 - q x_2^2$	y_1^3	(x_0, y_0, x_1, y_1)
3	$q^3 y_0^3 - q x_0^2$	2	2	$q^3 y_2^3 - q x_2^2$	0	(x_0, y_0, x_1, y_1)
4	$q^2 y_0^3 - x_0^2$	2	2	$q^2 y_2^3 - x_2^2$	$-x_2^2$	$(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2)$
4	$q^2 y_0^3 - q^2 x_0^2$	2	3	$q^2 y_2^3 - q^2 x_3^2$	0	$(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2)$
5	$q y_0^3 - q x_0^2$	2	3	$q y_2^3 - q x_3^2$	0	$(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2)$
6	$y_0^3 - x_0^2$	2	3	$y_2^3 - x_3^2$	$y_2^3 - x_3^2$	$(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2^3 - x_3^2)$

Centrándonos exclusivamente en la fibra sobre el origen (donde radica la singularidad), el ideal base es $\sqrt{I_0^0} = (x_0, y_0)$. Utilizando la técnica descrita en la tabla, deducimos inductivamente los ideales $\sqrt{I_m^0}$ que definen a $\pi_m^{-1}(0)$ en el nivel de m -jets:

$$\sqrt{I_0^0} = (x_0, y_0)$$

$$\sqrt{I_1^0} = (x_0, y_0)$$

$$\sqrt{I_2^0} = (x_0, y_0, x_1) \quad (\text{por la aparición de } -x_1^2 \text{ en } u = 2)$$

$$\sqrt{I_3^0} = (x_0, y_0, x_1, y_1) \quad (\text{por } y_1^3 \text{ en } u = 3)$$

$$\sqrt{I_4^0} = (x_0, y_0, x_1, y_1, x_2) \quad (\text{por } -x_2^2 \text{ en } u = 4)$$

$$\sqrt{I_5^0} = (x_0, y_0, x_1, y_1, x_2)$$

$$\sqrt{I_6^0} = (x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2^3 - x_3^2) \quad (\text{la ecuación reaparece con índices desplazados})$$

2 Grafos de componentes de Jets

Este análisis evidencia un fenómeno fractal de los esquemas de jets: la estructura de la singularidad original reemerge en el jet $m = 6$ como $y_2^3 - x_3^2$ módulo el radical previo.

m	Ideal sobre el origen $\sqrt{I_m^0}$	Generadores	Variables	Dimensión	$r(m + 1)$
0	(x_0, y_0)	2	2	0	1
1	(x_0, y_0)	2	4	2	2
2	(x_0, y_0, x_1)	3	6	3	3
3	(x_0, y_0, x_1, y_1)	4	8	4	4
4	$(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2)$	5	10	5	5
5	$(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2)$	5	12	7	6
6	$(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2^3 - x_3^2)$	6	14	8	7

De acuerdo con el criterio de Mustață (Proposición 2.1.2), el esquema de m -jets es irreducible si y solo si la dimensión de la fibra singular es estrictamente menor que $r(m + 1)$. Observando la última columna de la tabla, vemos que para todo $m \geq 1$, $\dim \pi_m^{-1}(0) \geq m + 1$. Por lo tanto, el esquema X_m tiene más de una componente irreducible a partir del nivel 1.

Para capturar la componente principal (es decir, la clausura $\overline{\pi_m^{-1}(X^{\text{reg}})}$), debemos saturar el ideal del jet respecto al ideal que define la singularidad, $J = (x_0, y_0)$. Recordemos que la saturación de un ideal I respecto a J se define como $I : J^\infty = \{f \mid \exists k \geq 0, fJ^k \subseteq I\}$.

Denotando como $H_m^{(0,0)}$ al ideal generado por los m primeros jets de la ecuación, $H_m^{(0,0)} = (hs^u(y_0^3 - x_0^2))_{u=0, \dots, m}$, la descomposición primaria completa para los primeros niveles se expresa explícitamente como:

$$\begin{aligned} \sqrt{I_0} &= (y_0^3 - x_0^2) \\ \sqrt{I_1} &= \overbrace{(x_0, y_0)}^{\pi_1^{-1}(X^{\text{sing}})} \cap \overbrace{\sqrt{H_1^{(0,0)}}}_{\overline{\pi_1^{-1}(X^{\text{reg}})}} : (x_0, y_0)^\infty \\ \sqrt{I_2} &= (x_0, y_0, x_1) \cap \sqrt{H_2^{(0,0)}} : (x_0, y_0)^\infty \\ \sqrt{I_3} &= (x_0, y_0, x_1, y_1) \cap \sqrt{H_3^{(0,0)}} : (x_0, y_0)^\infty \\ \sqrt{I_4} &= (x_0, y_0, x_1, y_1, x_2) \cap \sqrt{H_4^{(0,0)}} : (x_0, y_0)^\infty \end{aligned}$$

2 Grafos de componentes de Jets

$$\sqrt{I_5} = (x_0, y_0, x_1, y_1, x_2) \cap \sqrt{H_5^{(0,0)} : (x_0, y_0)^\infty}$$

$$\sqrt{I_6} = (x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2^3 - x_3^2) \cap \sqrt{H_6^{(0,0)} : (x_0, y_0)^\infty}$$

Por lo tanto, su grafo es el siguiente:

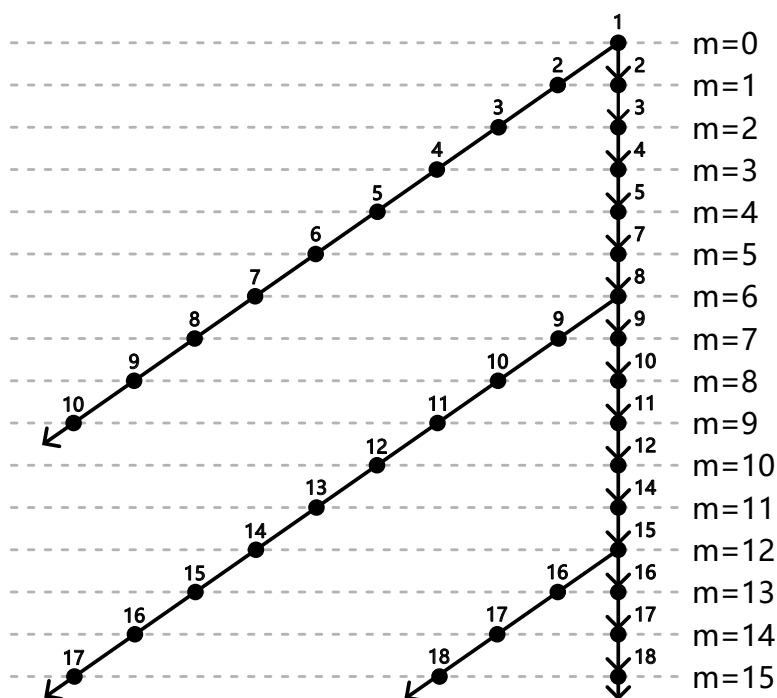


Figura 2.1: Grafo de componentes de jets hasta nivel $m = 15$ de la cúspide.

2.3.2. Ejemplo de singularidad de tipo A_3

Para demostrar la sensibilidad del grafo de componentes de jets como invariante topológico y la eficacia computacional de nuestros operadores al sistematizar heurísticas teóricas, analizaremos la superficie definida por $f = xy + z^4$. Esta variedad posee una singularidad aislada en el origen, clasificable topológicamente como una singularidad de tipo A_3 .

A diferencia de las singularidades más simples, observaremos cómo el operador revela bifurcaciones sucesivas y solapamientos en las ramas del espacio de jets. Realizamos

2 Grafos de componentes de Jets

el análisis sistemático sobre la fibra excepcional $\pi_m^{-1}(X^{\text{sing}})$, es decir, evaluando en el origen $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

Niveles iniciales y primera bifurcación:

Nivel u	Término desplazado S_+	$\sqrt{I_m^0}$
0	$x_0 y_0 + z_0^4$	(x_0, y_0, z_0)
1	$q x_1 y_1 + q^3 z_1^4$	(x_0, y_0, z_0)
2	$x_1 y_1 + q^2 z_1^4$	$(x_0, y_0, z_0, x_1 y_1)$

En el nivel $m = 2$, el ideal emergente contiene el producto $x_1 y_1$. Dado que estamos en un anillo de polinomios (dominio de integridad), este ideal no es primo y la componente geométrica se escinde en la intersección de dos ramas:

$$(x_0, y_0, z_0, x_1 y_1) = \underbrace{(x_0, y_0, z_0, x_1)}_{\text{Rama } x_1=0} \cap \underbrace{(x_0, y_0, z_0, y_1)}_{\text{Rama } y_1=0}$$

A partir de este punto, el algoritmo se ramifica y debemos evaluar las derivadas de Hasse-Schmidt iteradas sobre cada rama de manera independiente.

Análisis de la Rama ($x_1 = 0$):

Nivel u	Término desplazado S_+	$\sqrt{I_m^0}$
2	$x_1 y_1 + q z_1^4$	(x_0, y_0, z_0, x_1)
3	$x_2 y_1 + q z_1^4$	$(x_0, y_0, z_0, x_1, x_2 y_1)$

Nuevamente, en $m = 3$ emerge un producto cruzado, forzando una segunda bifurcación de esta rama:

$$(x_0, y_0, z_0, x_1, x_2 y_1) = (x_0, y_0, z_0, x_1, x_2) \cap (x_0, y_0, z_0, x_1, y_1)$$

Analizando cada uno de estas nuevas subramas hasta el nivel $m = 4$, obtenemos:

Sub-rama ($x_1 = 0, x_2 = 0$):

2 Grafos de componentes de Jets

Nivel u	Término desplazado S_+	$\sqrt{I_m^0}$
3	$x_2 y_1 + q z_1^4$	$(x_0, y_0, z_0, x_1, x_2)$
4	$x_3 y_1 + z_1^4$	$(x_0, y_0, z_0, x_1, x_2, x_3 y_1 + z_1^4)$

Sub-rama $(x_1 = 0, y_1 = 0)$:

Nivel u	Término desplazado S_+	$\sqrt{I_m^0}$
3	$x_2 y_1 + q z_1^4$	$(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1)$
4	$x_2 y_2 + z_1^4$	$(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, x_2 y_2 + z_1^4)$

Análisis de la Rama $(y_1 = 0)$:

Retomando la bifurcación simétrica original del nivel $m = 2$, evaluamos ahora con la restricción $y_1 = 0$:

Nivel u	Término desplazado S_+	$\sqrt{I_m^0}$
2	$x_1 y_1 + q^2 z_1^4$	(x_0, y_0, z_0, y_1)
3	$x_1 y_2 + q z_1^4$	$(x_0, y_0, z_0, y_1, x_1 y_2)$

Descomponiendo el ideal generado en $m = 3$:

$$(x_0, y_0, z_0, y_1, x_1 y_2) = \underbrace{(x_0, y_0, z_0, y_1, x_1)}_{\text{Ya estudiado arriba}} \cap (x_0, y_0, z_0, y_1, y_2)$$

Vemos que una de las ramas generadas es (x_1, y_1) , la cual coincide exactamente con la sub-rama obtenida en el caso anterior. Geométricamente, esto significa que las componentes irreducibles se entrelazan. Evolucionando la nueva sub-rama $(y_1 = 0, y_2 = 0)$ al nivel $m = 4$:

Nivel u	Término desplazado S_+	$\sqrt{I_m^0}$
3	$x_1 y_2 + q z_1^4$	$(x_0, y_0, z_0, y_1, y_2)$
4	$x_1 y_3 + z_1^4$	$(x_0, y_0, z_0, y_1, y_2, x_1 y_3 + z_1^4)$

Resumen de Componentes Excepcionales:

Sintetizando los cálculos, la descomposición primaria de la fibra sobre el origen para los primeros 4 niveles de jets es:

Nivel m	Descomposición de la fibra $\sqrt{I_m^0}$
0	(x_0, y_0, z_0)
1	(x_0, y_0, z_0)
2	$(x_0, y_0, z_0, x_1) \cap (x_0, y_0, z_0, y_1)$
3	$(x_0, y_0, z_0, x_1, x_2) \cap (x_0, y_0, z_0, x_1, y_1) \cap (x_0, y_0, z_0, y_1, y_2)$
4	$(x_0, y_0, z_0, x_1, x_2, x_3 y_1 + z_1^4) \cap (x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, x_2 y_2 + z_1^4) \cap (x_0, y_0, z_0, y_1, y_2, x_1 y_3 + z_1^4)$

Con ella, construimos la tabla con los números de dimensiones necesarias para aplicar el criterio de Mustață (Proposición 2.1.2):

Nivel m	Generadores	Variables	Dimensión	$r(m + 1)$
0	3	3	0	2
1	3	6	3	4
2	4	9	5	6
3	5	12	7	8
4	6	15	9	10

Concluyendo que los esquemas de jets asociados a $f = xy + z^4$ son irreducibles.

Sin embargo, si solo consideramos el grafo sobre el lugar singular, obtenemos que solo hay 3 componentes a partir de $m \geq 4$ por el hecho de que son desplazamientos de $xy + z^4$.

Por lo tanto, su grafo es el siguiente:

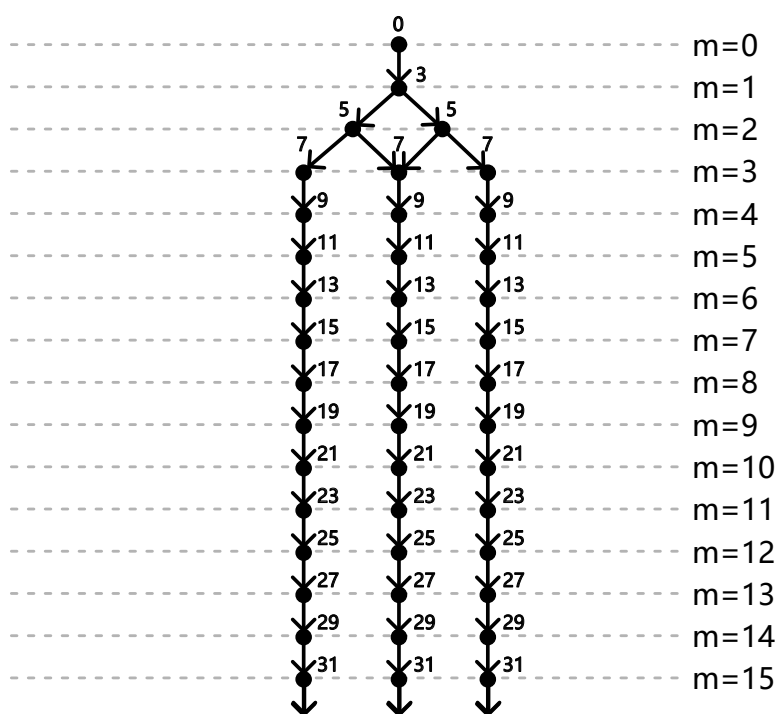


Figura 2.2: Grafo de componentes de jets sobre el lugar singular hasta nivel $m = 15$ de una singularidad de tipo A_3 .

2.4. Conclusiones y perspectivas computacionales

A lo largo de este capítulo hemos evidenciado cómo transitar desde la definición topológico-abstracta de los esquemas de jets hacia su determinación algebraica explícita. El obstáculo fundamental en el estudio de estos esquemas reside en la explosión combinatoria inabordable del cálculo de bases de Gröbner y descomposiciones primarias para ideales de Hasse-Schmidt iterados.

El desarrollo e introducción de los operadores formales hs y hq presentados en este trabajo constituyen un esfuerzo riguroso por sistematizar y algoritmizar las heurísticas de cálculo manual presentes en la literatura especializada. Al condensar matemáticamente estas técnicas, hemos logrado ilustrar de forma transparente la emergencia de componentes excepcionales, la bifurcación fractal de los grafos en singularidades aisladas (como la cúspide y A_3).

2 Grafos de componentes de Jets

A pesar de la eficacia de esta formalización, el estudio global de los grafos de componentes de jets permanece como un fértil problema abierto. Un desafío inmediato para trabajos futuros consiste en la implementación computacional nativa de los operadores hs y hq en sistemas de álgebra computacional como *SageMath*, *Singular* o *Macaulay2*. Asimismo, la generalización de estas metodologías algorítmicas para calcular grafos de jets en variedades que carecen de la propiedad de intersección completa local, y para las cuales el criterio clásico de dimensión requiere sofisticaciones, representa la siguiente frontera natural en este área de investigación geométrica.

Bibliografía

- [CLO15] David A. Cox, John Little y Donal O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. en. Springer International Publishing, 2015. DOI: [10.1007/978-3-319-16721-3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-16721-3). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-16721-3>.
- [CM21] Helena Cobo y Hussein Mourtada. «Jet schemes of quasi-ordinary surface singularities». En: *Nagoya Mathematical Journal* 242 (2021), págs. 77-164. DOI: [10.1017/nmj.2019.26](https://doi.org/10.1017/nmj.2019.26). URL: <https://doi.org/10.1017/nmj.2019.26>.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative Algebra. with a View Toward Algebraic Geometry*. New York, NY: Springer New York, 1995. ISBN: 9783540781226.
- [EM09] Lawrence Ein y Mircea Mustața. «Jet schemes and singularities». En: *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2*. Vol. 80, Part 2. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, págs. 505-546. ISBN: 978-0-8218-4703-9. DOI: [10.1090/pspum/080.2/2483946](https://doi.org/10.1090/pspum/080.2/2483946). URL: <https://doi.org/10.1090/pspum/080.2>.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer New York, 1977. DOI: [10.1007/978-1-4757-3849-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3849-0). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-3849-0>.
- [Ishii07] Shihoko Ishii. *Jet schemes, arc spaces and the Nash problem*. 2007. arXiv: [0704.3327](https://arxiv.org/abs/0704.3327) [math.AG]. URL: <https://arxiv.org/abs/0704.3327>.
- [Mac78] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer New York, 1978. DOI: [10.1007/978-1-4757-4721-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4721-8). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-4721-8>.

Bibliografía

- [Mou17] Hussein Mourtada. «Jet schemes of normal toric surfaces». En: *Bulletin de la Societe Mathematique de France* 145.2 (2017), págs. 237-266. ISSN: 0037-9484. DOI: [10.24033/bsmf.2736](https://doi.org/10.24033/bsmf.2736). URL: <https://doi.org/10.24033/bsmf.2736>.
- [Mou23] Hussein Mourtada. «Jet Schemes and Their Applications in Singularities, Toric Resolutions and Integer Partitions». En: *Handbook of Geometry and Topology of Singularities IV*. Ed. por José Luis Cisneros-Molina, Lê Dũng Tráng y José Seade. Cham: Springer International Publishing, 2023, págs. 211-249. ISBN: 978-3-031-31925-9. DOI: [10.1007/978-3-031-31925-9_4](https://doi.org/10.1007/978-3-031-31925-9_4). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-31925-9_4.
- [Mus01a] Mircea I. Mustata. «Singularities and jet schemes». English. Copyright - Database copyright ProQuest LLC; ProQuest does not claim copyright in the individual underlying works; Última actualización - 2023-02-23. Tesis doct. 2001, pág. 52. ISBN: 978-0-493-30977-4. URL: <https://www.proquest.com/docview/304683236>.
- [Mus01b] Mircea Mustață. «Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities». En: *Invent. Math.* 145.3 (2001). With an appendix by David Eisenbud and Edward Frenkel, págs. 397-424. ISSN: 0020-9910,1432-1297. DOI: [10.1007/s002220100152](https://doi.org/10.1007/s002220100152). URL: <https://doi.org/10.1007/s002220100152>.
- [Nash95] John F. Nash Jr. «Arc structure of singularities». En: *Duke Mathematical Journal* 81.1 (1995), págs. 31-38. DOI: [10.1215/S0012-7094-95-08103-4](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-95-08103-4). URL: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-95-08103-4>.
- [Pet08] Peter Petrov. «Nash problem on spaces of arcs». En: (2008). URL: <https://www.math.bas.bg/complan/staff/Dissertation-PhD-Petrov.pdf>.
- [Vak25] Ravi Vakil. *The rising sea*. en. Draft version (July 2024). Princeton, NJ: Princeton University Press, oct. de 2025. URL: <https://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGjul2724public.pdf>.
- [Voj13] Paul Vojta. *Jets via Hasse-Schmidt Derivations*. 2013. arXiv: [math/0407113](https://arxiv.org/abs/math/0407113) [[math.AG](https://arxiv.org/abs/math/0407113)]. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0407113>.

Bibliografía

- [Yue06] Cornelia O. Yuen. «Jet schemes and truncated wedge schemes». English. Copyright - Database copyright ProQuest LLC; ProQuest does not claim copyright in the individual underlying works; Última actualización - 2023-03-03. Tesis doct. 2006, pág. 92. ISBN: 978-0-542-79141-3.