

NOMBRE Y APELLIDO:

ROL USM:

Los ítems (a) y (b) corresponden a **30 puntos** cada uno, y el ítem (c) a **40 puntos**.

Problema 1 (100 puntos)

El objetivo de este problema es calcular, mediante el Teorema de los residuos, las integrales reales

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos(t)} \cos(\sin(t) - t)}{5 - 4 \cos(t)} dt \quad \text{y} \quad B = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos(t)} \sin(\sin(t) - t)}{5 - 4 \cos(t)} dt.$$

Para ello, sea

$$f(z) = \frac{e^z}{z(2z^2 - 5z + 2)}.$$

(a) **(30 pts)** Determine todos los puntos de $\mathbb{C}$ donde f no es holomorfa, clasifíquelos (singularidad aislada, polo de orden a determinar, o esencial) y calcule el residuo de f en cada uno de ellos.

(b) **(30 pts)** Usando el Teorema de los residuos, calcule

$$\int_{\Gamma(0,1)} f(z) dz \quad \text{y} \quad \int_{\gamma} f(z) dz,$$

donde γ es el borde del rectángulo de vértices $\frac{1}{4} - i$, $3 - i$, $3 + i$ y $\frac{1}{4} + i$, recorrido en sentido antihorario.

(c) **(40 pts)** Usando la parametrización $z(t) = e^{it}$ de $\Gamma(0,1)$, con $t \in [0, 2\pi]$, verifique que

$$\int_{\Gamma(0,1)} f(z) dz = -i \int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos(t)} e^{i(\sin(t)-t)}}{5 - 4 \cos(t)} dt,$$

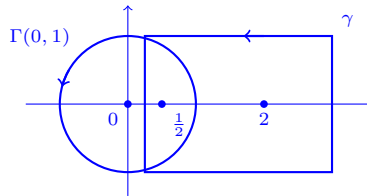
y deduzca de (b) los valores de A y B .

Indicación: Note que si $z = e^{it}$ entonces $z + \frac{1}{z} = 2 \cos(t)$. Además, $2z^2 - 5z + 2 = z(2(z + \frac{1}{z}) - 5)$ si $z \neq 0$.

Solución: Para (a), como $2z^2 - 5z + 2 = (2z - 1)(z - 2)$, el denominador $v(z) = z(2z^2 - 5z + 2) = 2z^3 - 5z^2 + 2z$ se anula sólo en $z = 0$, $z = \frac{1}{2}$ y $z = 2$, y luego f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 2\}$. Además $v'(z) = 6z^2 - 10z + 2$ verifica $v'(0) = 2$, $v'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$ y $v'(2) = 6$, i.e., los tres ceros de v son simples, y como $e^z \neq 0$, los puntos 0 , $\frac{1}{2}$ y 2 son **polos simples** de f . Así, la regla $\text{Res}(\frac{u}{v}, z_0) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}$ con $u(z) = e^z$ da¹

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}, \quad \text{Res}(f, \frac{1}{2}) = \frac{e^{1/2}}{-3/2} = -\frac{2\sqrt{e}}{3}, \quad \text{Res}(f, 2) = \frac{e^2}{6}.$$

Para (b), ningún polo de f está sobre las curvas. En el interior de $\Gamma(0,1)$ están 0 y $\frac{1}{2}$, pero no 2 , y en el interior de γ están $\frac{1}{2}$ y 2 , pero no 0 :



Luego, por el Teorema de los residuos,

$$\int_{\Gamma(0,1)} f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{e}}{3} \right) = \frac{\pi i}{3} (3 - 4\sqrt{e}), \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(-\frac{2\sqrt{e}}{3} + \frac{e^2}{6} \right) = \frac{\pi i}{3} (e^2 - 4\sqrt{e}).$$

Para (c), si $z = e^{it}$ entonces $dz = iz dt$ y, por la indicación, $2z^2 - 5z + 2 = z(2(z + \frac{1}{z}) - 5) = -z(5 - 4 \cos(t))$. Como además $e^z = e^{\cos(t)} e^{i \sin(t)}$, obtenemos

$$f(z) dz = -i \frac{e^z e^{-it}}{5 - 4 \cos(t)} dt = -i \frac{e^{\cos(t)} e^{i(\sin(t)-t)}}{5 - 4 \cos(t)} dt = -i \frac{e^{\cos(t)} [\cos(\sin(t) - t) + i \sin(\sin(t) - t)]}{5 - 4 \cos(t)} dt,$$

y al integrar en $[0, 2\pi]$ se obtiene la identidad pedida, cuyo lado derecho es $-i(A + iB) = B - iA$. Luego, por (b) y como $A, B \in \mathbb{R}$,²

$$B - iA = \frac{\pi i}{3} (3 - 4\sqrt{e}), \quad \text{i.e.,} \quad A = \frac{\pi}{3} (4\sqrt{e} - 3) \quad \text{y} \quad B = 0.$$

¹Alternativamente, $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$, e.g. $\text{Res}(f, \frac{1}{2}) = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{e^z}{2z(z-2)} = \frac{e^{1/2}}{-3/2}$.

²Alternativamente, $B = 0$ pues el cambio de variable $t \mapsto 2\pi - t$ cambia el signo del integrando de B .