

NOMBRE Y APELLIDO:

ROL USM:

Los ítems (a) y (b) corresponden a **50 puntos** cada uno, y el ítem (c) es un **Bonus** de **10 puntos**.

Problema 1 (100 puntos)

El objetivo de este problema es resolver, mediante separación de variables, la ecuación de difusión con convección en una barra de largo 1 cuyos extremos se mantienen a temperatura cero, i.e.,

$$u_t = u_{xx} - 3u_x \text{ en } (0, 1) \times (0, +\infty), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = g(x).$$

En términos físicos, el término $-3u_x$ corresponde a una corriente de velocidad 3 que arrastra el calor hacia la derecha.

(a) (**50 pts**) Buscando soluciones no nulas de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, verifique que X satisface

$$X'' - 3X' + \lambda X = 0 \text{ en } (0, 1), \quad X(0) = X(1) = 0,$$

y que $T' + \lambda T = 0$. Escriba la ecuación en X en forma autoadjunta, identificando p , q y w , y determine todos los valores propios λ_n y todas las funciones propias X_n .

Indicación: Considere la sustitución $X(x) = e^{3x/2}Y(x)$.

(b) (**50 pts**) Escriba la solución del problema como una serie, determine sus coeficientes en términos de g y calcúelos explícitamente para $g(x) = e^{3x/2}x(1-x)$.

Indicación: Si $h(0) = h(1) = 0$, dos integraciones por partes dan la fórmula

$$\int_0^1 h(x) \sin(n\pi x) dx = -\frac{1}{n^2\pi^2} \int_0^1 h''(x) \sin(n\pi x) dx.$$

(c) (**Bonus**) Determine la EDP y las condiciones que satisface w , donde $u(x, t) = e^{3x/2}e^{-9t/4}w(x, t)$ y g es como en (b).

Solución: Para (a), reemplazando $u = XT$ obtenemos $XT' = (X'' - 3X')T$ y luego, dividiendo por XT ,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) - 3X'(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

donde λ es constante pues el lado izquierdo no depende de x y el derecho no depende de t . Además, $u(0, t) = u(1, t) = 0$ para todo t da $X(0) = X(1) = 0$. Notar que el factor integrante $p(x) = e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$ verifica $p' = -3p$ y luego $p(X'' - 3X') = (pX')'$, i.e.,

$$(e^{-3x}X')' + \lambda e^{-3x}X = 0, \quad p(x) = w(x) = e^{-3x}, \quad q \equiv 0,$$

y con ello las funciones propias son ortogonales respecto de $\langle f, h \rangle_w = \int_0^1 f h e^{-3x} dx$. Por otra parte, si $X = e^{3x/2}Y$ entonces $X' = e^{3x/2}(\frac{3}{2}Y + Y')$ y $X'' = e^{3x/2}(\frac{9}{4}Y + 3Y' + Y'')$, de donde

$$X'' - 3X' + \lambda X = e^{3x/2} \left[\frac{9}{4}Y + 3Y' + Y'' - \frac{9}{2}Y - 3Y' + \lambda Y \right] = e^{3x/2} \left[Y'' + \left(\lambda - \frac{9}{4} \right) Y \right].$$

Como $e^{3x/2} > 0$, el problema equivale a $Y'' + \left(\lambda - \frac{9}{4} \right) Y = 0$ con $Y(0) = Y(1) = 0$, cuyos valores propios son $\lambda - \frac{9}{4} = n^2\pi^2$ con $n \geq 1$, i.e.,

$$\lambda_n = \frac{9}{4} + n^2\pi^2, \quad X_n(x) = e^{3x/2} \sin(n\pi x), \quad n \geq 1.$$

Para (b), $T' + \lambda_n T = 0$ da $T_n(t) = e^{-\lambda_n t}$ y luego, superponiendo,

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} c_n e^{-(\frac{9}{4} + n^2\pi^2)t} e^{3x/2} \sin(n\pi x).$$

Notar que $\|X_n\|_w^2 = \int_0^1 e^{3x} \sin^2(n\pi x) e^{-3x} dx = \frac{1}{2}$, i.e., el peso cancela exactamente la exponencial, y con ello la condición $u(x, 0) = g$ determina

$$c_n = \frac{\langle g, X_n \rangle_w}{\|X_n\|_w^2} = 2 \int_0^1 g(x) e^{-3x/2} \sin(n\pi x) dx.$$

Si $g(x) = e^{3x/2}x(1-x)$, la exponencial se cancela nuevamente y basta calcular la serie de senos de $h(x) = x(1-x)$ en $(0, 1)$. Como $h(0) = h(1) = 0$ y $h'' \equiv -2$, la indicación entrega

$$c_n = 2 \int_0^1 h(x) \sin(n\pi x) dx = \frac{4}{n^2\pi^2} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^3\pi^3},$$

i.e., $c_n = 8/(n^3\pi^3)$ si n es impar y $c_n = 0$ si n es par.¹ Así,

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} e^{3x/2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-(\frac{9}{4} + (2k+1)^2 \pi^2)t} \sin((2k+1)\pi x).$$

Para (c), si $u = e^{3x/2} e^{-9t/4} w$ entonces el cálculo de (a), con w en lugar de Y , da

$$u_{xx} - 3u_x = e^{3x/2} e^{-9t/4} \left(w_{xx} - \frac{9}{4} w \right) \quad \text{y} \quad u_t = e^{3x/2} e^{-9t/4} \left(w_t - \frac{9}{4} w \right),$$

i.e., los términos $-\frac{9}{4}w$ se cancelan y w satisface la ecuación del calor $w_t = w_{xx}$ en $(0, 1)$. Como $e^{3x/2} e^{-9t/4}$ no se anula, las condiciones de borde son $w(0, t) = w(1, t) = 0$, y evaluando en $t = 0$ obtenemos el dato inicial $w(x, 0) = e^{-3x/2} g(x) = x(1-x)$.

¹Los coeficientes pares se anulan sin calcular: $h(1-x) = h(x)$ y $\sin(n\pi(1-x)) = (-1)^{n+1} \sin(n\pi x)$, i.e., para n par el integrando es antisimétrico respecto de $x = 1/2$.