

NOMBRE Y APELLIDO:

ROL USM:

Problema 1 (30 puntos)

El objetivo de este problema es resolver, mediante el método de las características, la EDP de primer orden

$$u_t + 2x u_x = -u + x \text{ en } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \quad u(x, 0) = f(x),$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$.

(a) **(10 pts)** Determine las curvas características $x(s)$ con $x(0) = x_0$, y dibuje algunas de ellas en el plano (x, t) .

(b) **(12 pts)** Encuentre $u(x, t)$ en términos de f .

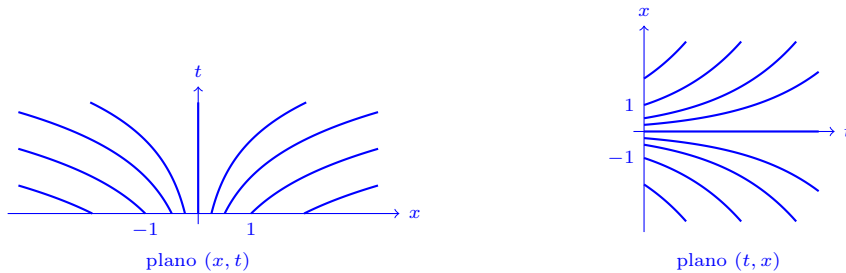
Indicación: Escriba la EDO que satisface $g(s) = u(x(s), s)$, donde puede ser útil considerar el factor integrante e^s .

(c) **(8 pts)** Calcule $w(x) := \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, y verifique que w es solución de la EDP.

Solución: Para (a), la idea es buscar curvas $s \mapsto (x(s), s)$ del plano (x, t) sobre las cuales la EDP se reduzca a una EDO. Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{ds} u(x(s), s) = u_t(x(s), s) + x'(s) u_x(x(s), s),$$

y el lado derecho coincide con $u_t + 2x u_x$ (el lado izquierdo de la EDP) evaluado sobre la curva si $x'(s) = 2x(s)$. Así, las curvas características resuelven $x'(s) = 2x(s)$ con $x(0) = x_0$, i.e., $x(s) = x_0 e^{2s}$. En el plano (x, t) son las curvas $x = x_0 e^{2t}$, y en el plano (t, x) son los gráficos de las funciones $t \mapsto x_0 e^{2t}$:



Para (b), sea $g(s) := u(x(s), s)$. Por (a) y la EDP,

$$g'(s) = u_t + 2x(s) u_x = -g(s) + x_0 e^{2s},$$

i.e., $g' + g = x_0 e^{2s}$ con $g(0) = u(x_0, 0) = f(x_0)$. Multiplicando por el factor integrante e^s obtenemos $(e^s g)' = x_0 e^{3s}$ y luego, integrando entre 0 y s ,¹

$$e^s g(s) - f(x_0) = \frac{x_0}{3} (e^{3s} - 1), \quad \text{i.e.,} \quad g(s) = f(x_0) e^{-s} + \frac{x_0}{3} (e^{2s} - e^{-s}).$$

Finalmente, el punto (x, t) está sobre la característica con $x_0 = x e^{-2t}$, y como $u(x, t) = g(t)$ se obtiene

$$u(x, t) = e^{-t} f(x e^{-2t}) + \frac{x}{3} (1 - e^{-3t}).$$

Para (c), como $x e^{-2t} \rightarrow 0$ y f es continua, $f(x e^{-2t}) \rightarrow f(0)$ y luego $e^{-t} f(x e^{-2t}) \rightarrow 0$, i.e.,

$$w(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = \frac{x}{3} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Además $w_t + 2x w_x = \frac{2x}{3} = -w + x$, i.e., w es solución de la EDP.

¹Alternativamente, la solución general de $g' + g = x_0 e^{2s}$ es $C e^{-s} + \frac{x_0}{3} e^{2s}$, y $g(0) = f(x_0)$ da $C = f(x_0) - \frac{x_0}{3}$.

Problema 2 (40 puntos)

El objetivo de este problema es resolver, mediante separación de variables, la ecuación del calor no homogénea en una barra de largo $\frac{\pi}{2}$ cuyo extremo izquierdo se mantiene a temperatura 1 y cuyo extremo derecho está aislado, i.e.,

$$u_t = u_{xx} + \sin(x) \text{ en } (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, +\infty), \quad u(0, t) = 1, \quad u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \quad u(x, 0) = 1 + \sin(3x).$$

En términos físicos, el término $\sin(x)$ corresponde a una fuente de calor, más intensa cerca del extremo aislado.

- (10 pts)** Encuentre la solución estacionaria $w(x)$, i.e., la solución de la EDP que no depende de t y que verifica ambas condiciones de borde, y determine el problema que satisface $v := u - w$.
- (15 pts)** Buscando soluciones no nulas de la forma $v(x, t) = X(x)T(t)$, determine el problema de Sturm–Liouville que satisface X , encuentre todos los valores propios λ_n y funciones propias X_n .
- (15 pts)** Escriba v como una serie, determine sus coeficientes y concluya la expresión de u . ¿A qué función tiende u cuando $t \rightarrow +\infty$?

Solución: Para (a), si $w = w(x)$ entonces la EDP se reduce a $w'' = -\sin(x)$, cuya solución general es $w(x) = \sin(x) + Ax + B$. Las condiciones de borde dan $w(0) = B = 1$ y $w'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) + A = A = 0$, i.e., $w(x) = 1 + \sin(x)$. Como w verifica la EDP y las condiciones de borde, por linealidad $v := u - w$ satisface

$$v_t = v_{xx} \text{ en } (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, +\infty), \quad v(0, t) = 0, \quad v_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \quad v(x, 0) = \sin(3x) - \sin(x).$$

Para (b), reemplazando $v = XT$ obtenemos $XT' = X''T$ y luego, dividiendo por XT ,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

donde λ es constante pues el lado izquierdo no depende de x y el derecho no depende de t , i.e., $T' + \lambda T = 0$. Además, $v(0, t) = v_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0$ para todo t da $X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0$, i.e., X satisface el problema de Sturm–Liouville

$$X'' + \lambda X = 0 \text{ en } (0, \frac{\pi}{2}), \quad X(0) = 0, \quad X'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Por la tabla de valores propios (condiciones $X(0) = 0$ y $X'(L) = 0$, con $L = \frac{\pi}{2}$),²

$$\lambda_n = (2n - 1)^2, \quad X_n(x) = \sin((2n - 1)x), \quad n \geq 1.$$

Para (c), $T' + \lambda_n T = 0$ da $T_n(t) = e^{-(2n-1)^2 t}$ y luego, superponiendo,

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 1} c_n e^{-(2n-1)^2 t} \sin((2n - 1)x).$$

Evaluable en $t = 0$, la condición $v(x, 0) = \sin(3x) - \sin(x)$ se escribe $\sum_{n \geq 1} c_n \sin((2n - 1)x) = -X_1(x) + X_2(x)$, y por unicidad de los coeficientes $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ y $c_n = 0$ para $n \geq 3$.³ Así,

$$u(x, t) = 1 + (1 - e^{-t}) \sin(x) + e^{-9t} \sin(3x),$$

y en particular $u(x, t) \rightarrow 1 + \sin(x) = w(x)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Problema 3 (30 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(x + iy) = e^{x^2 - y^2} (\cos(bxy) + i \sin(bxy)), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

donde $b \in \mathbb{R}$ es una constante.

- (12 pts)** Escriba $f = u + iv$ y determine todos los $b \in \mathbb{R}$ para los cuales u y v verifican las ecuaciones de Cauchy–Riemann en todo $\mathbb{R}^2$. Para ese valor de b , calcule f' y pruebe que $f'(z) = 2z f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- (8 pts)** En lo que sigue, b es el valor encontrado en (a). Escriba f como función de z y deduzca su desarrollo en serie de potencias en torno a $z_0 = 0$, su radio de convergencia y el valor de $f^{(n)}(0)$ para todo $n \geq 0$.

Indicación: Note que si $z = x + iy$ entonces $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

²Alternativamente, a mano: si $\lambda < 0$ entonces $X = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$ con $\mu = \sqrt{-\lambda}$, y las condiciones de borde dan $A = B = 0$; si $\lambda = 0$ entonces $X = A + Bx$ y también $A = B = 0$; y si $\lambda > 0$ entonces $X(0) = 0$ da $X = B \sin(\sqrt{\lambda} x)$, y $X'(\frac{\pi}{2}) = B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2}) = 0$ con $B \neq 0$ da $\sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)\pi}{2}$.

³Alternativamente, $c_n = \frac{\langle v(\cdot, 0), X_n \rangle}{\|X_n\|^2}$ con $\|X_n\|^2 = \frac{\pi}{4}$, y las relaciones de ortogonalidad dan los mismos valores.

(c) **(10 pts)** Determine todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = 1$, y el orden de cada uno de ellos como cero de la función $z \mapsto f(z) - 1$.

Solución: Para (a), $u(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos(bxy)$ y $v(x, y) = e^{x^2-y^2} \sin(bxy)$ son de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$, y derivando,

$$u_x = e^{x^2-y^2} (2x \cos(bxy) - by \sin(bxy)), \quad v_y = e^{x^2-y^2} (bx \cos(bxy) - 2y \sin(bxy)),$$

$$u_y = -e^{x^2-y^2} (2y \cos(bxy) + bx \sin(bxy)), \quad v_x = e^{x^2-y^2} (2x \sin(bxy) + by \cos(bxy)),$$

i.e.,

$$u_x - v_y = (2-b) e^{x^2-y^2} (x \cos(bxy) + y \sin(bxy)), \quad u_y + v_x = (b-2) e^{x^2-y^2} (y \cos(bxy) - x \sin(bxy)).$$

Si $b = 2$ ambas expresiones se anulan en todo $\mathbb{R}^2$, y si $b \neq 2$ la primera vale $(2-b)e \neq 0$ en $(x, y) = (1, 0)$. Así, las ecuaciones de Cauchy–Riemann se verifican en todo $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $b = 2$, y en tal caso f es entera y

$$f' = u_x + iv_x = e^{x^2-y^2} (2x + 2iy) (\cos(2xy) + i \sin(2xy)) = 2z f(z).$$

Para (b), como $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, la definición de la exponencial compleja da

$$e^{z^2} = e^{x^2-y^2} (\cos(2xy) + i \sin(2xy)),$$

i.e., $f(z) = e^{z^2}$. Reemplazando z por z^2 en $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$, que converge en todo $\mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{z^{2m}}{m!} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C},$$

y luego $R = +\infty$. Como $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, los coeficientes $a_{2m} = \frac{1}{m!}$ y $a_{2m+1} = 0$ dan⁴

$$f^{(2m)}(0) = \frac{(2m)!}{m!}, \quad f^{(2m+1)}(0) = 0, \quad m \geq 0.$$

Para (c), $f(z) = 1$ si y sólo si $e^{z^2} = 1$, i.e., $z^2 = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ (pues $|e^w| = e^{\operatorname{Re}(w)}$ y $\arg(e^w) = \operatorname{Im}(w)$ módulo 2π). Si $k = 0$ entonces $z = 0$; si $k \geq 1$ entonces $2k\pi i = 2k\pi e^{i\pi/2}$ y sus dos raíces cuadradas son $z = \pm \sqrt{2k\pi} e^{i\pi/4} = \pm \sqrt{k\pi} (1 + i)$; y si $k \leq -1$ entonces $2k\pi i = 2|k|\pi e^{-i\pi/2}$ y $z = \pm \sqrt{|k|\pi} (1 - i)$. Así,

$$f(z) = 1 \iff z = 0 \quad \text{o} \quad z = \sqrt{k\pi} (\pm 1 \pm i) \text{ para algún } k \geq 1.$$

Sea $h(z) := f(z) - 1$. Por (a), $h'(z) = 2z e^{z^2}$, luego si $z_k \neq 0$ es un cero de h entonces $h'(z_k) = 2z_k e^{z_k^2} = 2z_k \neq 0$, i.e., todos los ceros no nulos son **simples**. Por otra parte, por (b),

$$h(z) = z^2 + \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{6} + \cdots = z^2 g(z), \quad g(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{z^{2m}}{(m+1)!},$$

con g analítica y $g(0) = 1 \neq 0$, i.e., $z = 0$ es un cero **doble**.

⁴Alternativamente, escribiendo $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, la identidad $f' = 2zf$ de (a) da $(n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1}$ para $n \geq 1$, con $a_0 = f(0) = 1$ y $a_1 = f'(0) = 0$.