

GUIA 5 DE EJERCICIOS (MAT70625)

PEDRO MONTERO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Sean P, Q polinomios, sea $f = \frac{P}{Q}$ y sean a_j los ceros de Q . Se denota por C_R el semicírculo superior de radio R centrado en el origen ($\gamma(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$). Si Q no posee ceros reales, $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ y $\omega \geq 0$, la integral de $f(z) e^{i\omega z}$ sobre C_R tiende a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$, y el Teorema de los residuos da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_j) > 0} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, a_j) \quad (\omega \geq 0),$$

que con $\omega = 0$ da $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Si $\omega \leq 0$ se usa el semicírculo inferior, y la integral es $-2\pi i$ por la suma de los residuos de $f(z) e^{i\omega z}$ en los a_j con $\text{Im}(a_j) < 0$. Si P y Q poseen coeficientes reales, las integrales de $f(x) \cos(\omega x)$ y de $f(x) \sin(\omega x)$ son la parte real e imaginaria de la anterior.

Si $\omega > 0$ y $|f(z)| \leq M_R$ sobre C_R , el **Lema de Jordan** da

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{i\omega z} dz \right| \leq \frac{\pi}{\omega} M_R,$$

y así la fórmula anterior vale para $\omega > 0$ si $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$, donde la integral se define como $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) e^{i\omega x} dx$.

Si $F(x, y)$ es un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$, con $z = e^{it}$ se tiene $dz = iz dt$, $\cos(t) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ y $\sin(t) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$, y luego

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) dt = 2\pi \sum_{|b| < 1} \text{Res}(g, b), \quad g(z) := \frac{1}{z} F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Sea g holomorfa en un abierto que contiene al semiplano $\{\text{Im}(z) \geq 0\}$, salvo en puntos b_j del semiplano superior y en polos simples x_k del eje real, y tal que la integral de g sobre C_R tiende a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$. Entonces

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 2\pi i \sum_j \text{Res}(g, b_j) + i\pi \sum_k \text{Res}(g, x_k),$$

donde el **valor principal** es el límite, cuando $R \rightarrow +\infty$ y $\varepsilon \rightarrow 0^+$, de la integral de g sobre $[-R, R]$ sin los intervalos $]x_k - \varepsilon, x_k + \varepsilon[$; si la integral converge, coincide con su valor principal.

Sea $\log_\pi(z) = \ln|z| + i \arg_\pi(z)$, con $\arg_\pi(z) \in]0, 2\pi[$, la rama del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}$, y sea $z^\alpha := \exp(\alpha \log_\pi(z))$. Si Q no posee ceros en $[0, +\infty[$ y $d := \deg(Q) - \deg(P)$, entonces

$$\int_0^{+\infty} f(x) x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_j \text{Res}(f(z) z^\alpha, a_j) \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, -1 < \alpha < d-1),$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_j \text{Res}\left((\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z), a_j\right) \quad (d \geq 2),$$

donde a_j recorre todos los ceros de Q y los residuos se calculan con la misma rama $\log_\pi$.

1. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$ y $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$.
2. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$.

3. Probar que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$ para todo $a > 1$, y calcular $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \sin(t)}$.
4. Calcular $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \sin^2(t)}$.
5. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + a^2} dx$ para $a > 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$.
6. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{(x^2 + 1)^2} dx$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$, y deducir el valor de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{(x^2 + 1)^2} dx$.
7. Sean $\omega, R > 0$. Probar que $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, y deducir que $\int_0^{\pi} e^{-\omega R \sin(t)} dt \leq \frac{\pi}{\omega R}$.
8. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(x)}{x^2 - 2x + 2} dx$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 - 2x + 2} dx$.
9. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin(2x)}{x^4 + 4} dx$.
10. Probar que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega x)}{x} dx$ vale $\frac{\pi}{2}$ si $\omega > 0$ y $-\frac{\pi}{2}$ si $\omega < 0$.
11. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + 1)} dx$.
12. Calcular v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx$, y deducir el valor de $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$.
13. Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx$.
14. Probar que $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1 + x)^2} dx = \frac{\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)}$ para todo $-1 < \alpha < 1$ con $\alpha \neq 0$.
15. Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x + 1)(x + 2)} dx$.
16. Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3 + 1} dx$.