

GUIA 4 DE EJERCICIOS (MAT70625)

PEDRO MONTERO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Un **camino** es una función continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos; es **cerrado** si $\gamma(a) = \gamma(b)$, y **simple** si no se corta a sí mismo. Si f es continua sobre γ , la **integral de línea** de f sobre γ es

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

y si $|f(z)| \leq M$ sobre γ , entonces $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \ell(\gamma)$, donde $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ es la **longitud** de γ . Se denota por $\Gamma(z_0, r)$ el círculo de centro z_0 y radio r recorrido en sentido antihorario ($\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$), y por C_R el semicírculo superior de radio R centrado en el origen ($\gamma(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$). Una **primitiva** de f en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es una función holomorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F' = f$.

Toda función f holomorfa en un anillo $R_1 < |z - z_0| < R_2$, con $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$, se escribe ahí, de manera única, como una **serie de Laurent** $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$. Se dice que z_0 es una **singularidad aislada** de f si f es holomorfa en $0 < |z - z_0| < r$ para algún $r > 0$, y según los coeficientes a_n con $n < 0$ de su serie de Laurent en ese anillo, z_0 es una **singularidad removible** (si todos son nulos), un **polo de orden** $m \geq 1$ (si $a_{-m} \neq 0$ y $a_n = 0$ para todo $n < -m$) o una **singularidad esencial** (si infinitos de ellos son no nulos). El **residuo** de f en z_0 es $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$.

1. Calcular $\int_{\gamma} \text{Re}(z) dz$ sobre el segmento de 0 a $1 + i$ y sobre el camino que va de 0 a 1 y luego de 1 a $1 + i$. Comparar los valores.

2. Calcular $\int_{\Gamma(0,1)} |z| dz$ y $\int_{\Gamma(0,1)} \frac{dz}{z^2}$ directamente desde la definición de integral de línea.

3. Usar la fórmula

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy), \quad f = u + iv,$$

para escribir $\int_{\Gamma(0,1)} \bar{z} dz$ como dos integrales de línea reales, y verificar que su valor es $2\pi i$.

4. Acotar $\left| \int_{C_R} \frac{z dz}{z^3 + 1} \right|$ para $R > 1$ y verificar que tiende a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$.

5. Acotar $\left| \int_{C_R} \frac{z^2 dz}{z^4 + 1} \right|$ para $R > 1$ y determinar el límite cuando $R \rightarrow +\infty$.

6. Determinar si $f(z) = \frac{1}{z^2}$ posee primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y si $g(z) = \frac{1}{z}$ posee primitiva en el semiplano $\{\text{Re}(z) > 0\}$.

7. Calcular $\int_{\Gamma(0,2)} \frac{z dz}{(z-1)(z+3)}$ y $\int_{\Gamma(0,4)} \frac{z dz}{(z-1)(z+3)}$.

8. Calcular $\int_{\Gamma(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z-1)^2} dz$ y $\int_{\Gamma(2,1)} \frac{dz}{z^2 + 1}$.

9. Calcular $\int_{\Gamma(0,1)} \frac{e^{2z}}{z^4} dz$ y $\int_{\Gamma(0,1)} \frac{dz}{z(z-2)}$.

10. Sea Γ el borde del cuadrado de vértices $\pm 2 \pm 2i$, recorrido en sentido antihorario. Calcular $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}$.

11. Determinar $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$ cuando Γ es un camino cerrado simple antihorario que no encierra el origen, y cuando sí lo encierra.
12. Desarrollar $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ en serie de Laurent en el anillo $0 < |z-2| < 2$.
13. Desarrollar $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ en serie de Laurent en los anillos $1 < |z| < 3$ y $|z| > 3$.
14. Desarrollar $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ en serie de Laurent en el anillo $0 < |z-1| < +\infty$.
15. Calcular los tres primeros términos no nulos de la serie de Laurent de $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ en el anillo $0 < |z| < \pi$.
16. Clasificar las singularidades aisladas de $\frac{z}{\sin(z)}$, de $\frac{e^z-1-z}{z^3}$ y de $z^2 e^{1/z}$, indicando el orden de cada polo.
17. Calcular el residuo de $\frac{z+1}{z^2(z-2)}$ en cada una de sus singularidades.
18. Calcular el residuo de $\frac{1}{\sinh(z)}$ en cada uno de sus polos.
19. Calcular el residuo de $\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$, de $\frac{e^z}{z^2+\pi^2}$ y de $\frac{z^2}{z^4+1}$ en cada uno de sus polos.
20. Calcular el residuo de $\frac{z}{\sin(z)}$ en cada una de sus singularidades aisladas.
21. Calcular el residuo de $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ en cada uno de sus polos, y el residuo de $\frac{ze^z}{(z-1)^3}$ en $z_0 = 1$.
22. Calcular el residuo de $z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ en $z_0 = 0$ y el residuo de $ze^{1/(z-1)}$ en $z_0 = 1$.
23. Determinar el orden del polo en $z_0 = 0$ de $\frac{1-\cos(z)}{z^3}$ y de $\frac{\sin(z)-z}{z^6}$, y calcular el residuo en cada caso.
24. Calcular el residuo en $z_0 = 0$ de $\frac{\cot(z)}{z^2}$ y de $\frac{1}{z(e^z-1)}$ a partir de sus series de Laurent.
25. Calcular $\int_{\Gamma(0,2)} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ y $\int_{\Gamma(0,1)} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$.
26. Calcular $\int_{\Gamma(0,4)} \frac{dz}{z^2 \sin(z)}$.