

GUIA 3 DE EJERCICIOS (MAT70625)

PEDRO MONTERO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es **holomorfa** en Ω si el límite

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad h \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

existe para todo $z \in \Omega$, y es **entera** si además $\Omega = \mathbb{C}$. Escribiendo $f = u + iv$ con $u = \operatorname{Re}(f)$ y $v = \operatorname{Im}(f)$, las **ecuaciones de Cauchy–Riemann** son $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$; si u y v son de clase $\mathcal{C}^1$, ellas equivalen a que f sea holomorfa, y en tal caso $f' = u_x + iv_x$. Dos funciones armónicas u, v que verifican esas ecuaciones se llaman **armónicas conjugadas**.

Para $\theta_0 \in \mathbb{R}$ se escribe $\Omega_{\theta_0} = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^{\leq 0} e^{i\theta_0})$, es decir, el plano menos la semirrecta de ángulo $\theta_0 + \pi$. Para $z \in \Omega_{\theta_0}$, $\arg_{\theta_0}(z)$ denota el único argumento de z en $]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[$, la **rama del logaritmo** es $\log_{\theta_0}(z) = \ln|z| + i \arg_{\theta_0}(z)$ y las potencias son $z^\alpha = \exp(\alpha \log_{\theta_0}(z))$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. La **rama principal** es la de $\theta_0 = 0$, y se denota Arg y Ln .

Toda serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ posee un **radio de convergencia** $R \in [0, +\infty]$, el único número tal que la serie converge absolutamente si $|z - z_0| < R$ y diverge si $|z - z_0| > R$. Si f es holomorfa cerca de z_0 y no es idénticamente nula ahí, se dice que z_0 es un **cero de orden** m de f cuando $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, lo que equivale a escribir $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ con g holomorfa y $g(z_0) \neq 0$.

1. Determinar todas las raíces cúbicas de $-8i$, escribirlas en forma binomial (coordenadas cartesianas) y ubicarlas en el plano.
2. Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen}(z) = 2$.
3. Calcular $\operatorname{Ln}(-1 + i)$ y $(1 + i)^i$ con la rama principal, y comparar con los valores que entrega la rama $\log_{2\pi}$.
4. Probar que $i^i = e^{-5\pi/2}$ si se escoge la rama $\log_{2\pi}$.
5. Probar, directamente desde la definición de derivada, que $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$.
6. Sea $f(x + iy) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Determinar para qué valores de a, b, c, d la función f es entera. *Indicación: escribir $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.*
7. Verificar las ecuaciones de Cauchy–Riemann para $f(z) = z^3$ y para $f(z) = \operatorname{Im}(z)$, y decidir en cada caso dónde es holomorfa.
8. Verificar que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, encontrar su armónica conjugada y reconocer la función holomorfa $f = u + iv$ resultante.
9. Determinar todos los $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los cuales $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es armónica, y calcular la armónica conjugada en cada caso.
10. Usar las ecuaciones de Cauchy–Riemann en coordenadas polares,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad f'(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right),$$

para verificar que la rama principal de $z^{1/2}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$, y calcular su derivada.

11. Sea $a_n = u_n + iv_n$ con $u_n, v_n \in \mathbb{R}$. Probar que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n \geq 0} u_n$ y $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergen.

12. Calcular el radio de convergencia de $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^n + 3^n}$ y de $\sum_{n \geq 0} 2^n z^{2n}$.
13. Calcular el radio de convergencia de $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$, de $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ y de $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$.
14. Deducir, derivando la serie geométrica $\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$ (válida para $|z| < 1$), el desarrollo en serie de potencias de $\frac{1}{(1-z)^3}$ en torno al origen, indicando su radio de convergencia.
15. Determinar, sin calcular los coeficientes, el radio de convergencia de la serie de Taylor de $\frac{1}{z^2-3z+2}$ en torno a $z_0 = 0$ y en torno a $z_0 = -1$.
16. Desarrollar $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$ en serie de potencias en torno a $z_0 = 0$ usando fracciones parciales, e indicar el radio de convergencia.
17. Calcular los cuatro primeros términos no nulos del desarrollo en serie de potencias de $\frac{z}{e^z-1}$ en torno al origen.
18. Determinar el orden de todos los ceros de $e^z - 1$ y de $z^2 \sinh(z)$.
19. Determinar el orden del cero en $z_0 = 0$ de $\sin(z) - z \cos(z)$ y de $\cosh(z) - 1$.