

GUIA 2 DE EJERCICIOS (MAT70625)

PEDRO MONTERO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Salvo mención contraria, $L > 0$, $\alpha > 0$ y $c > 0$ son constantes, $\mathbf{n}$ denota el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$, y todas las funciones involucradas se suponen tan regulares como sea necesario para justificar los cálculos.

Un **problema regular de Sturm–Liouville** en (a, b) consiste en encontrar los $\lambda \in \mathbb{R}$ (valores propios) para los cuales

$$(p(x)X')' + q(x)X + \lambda w(x)X = 0 \text{ en } (a, b), \quad \alpha_0 X(a) + \alpha_1 X'(a) = 0, \quad \beta_0 X(b) + \beta_1 X'(b) = 0,$$

admite una solución $X \not\equiv 0$ (función propia), donde p, p', q, w son continuas en $[a, b]$, con $p > 0$ y $w > 0$. Escribir una EDO lineal de segundo orden en **forma autoadjunta** es llevarla a la forma anterior, identificando p, q y w .

1. Resolver la ecuación del calor $u_t = \alpha u_{xx}$ en $(0, L)$ con extremos a temperatura 0 y dato inicial

$$g(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right),$$

y decidir cuál de los dos modos domina para t grande.

2. Calcular los coeficientes de la serie de senos

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

para $g(x) = x(L-x)$, y escribir la solución del problema anterior con ese dato inicial.

3. Sea

$$u(x, t) = 3e^{-\alpha\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) - e^{-9\alpha\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

la solución del problema del calor con dato inicial $g(x) = 3\sin(\frac{\pi}{L}x) - \sin(\frac{3\pi}{L}x)$. Determinar el tiempo t^* en que la amplitud del segundo término cae al 1 % de la del primero.

4. Resolver el problema del calor en $(0, L)$ con condiciones de borde mixtas $u(0, t) = 0$, $u_x(L, t) = 0$, verificando que ahora $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$.
5. Resolver la ecuación del calor en $(0, L)$ cuando los extremos se mantienen a temperaturas constantes $u(0, t) = A$ y $u(L, t) = B$, homogeneizando primero las condiciones de borde con una función lineal en x . ¿A qué perfil tiende u cuando $t \rightarrow +\infty$?
6. Escribir $X'' + 2X' + (1 + \lambda)X = 0$ en forma autoadjunta e identificar p, q y w .
7. Escribir $X'' + \frac{2}{x}X' + \lambda X = 0$ en forma autoadjunta.
8. Resolver el problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ en $(0, L)$ con $X'(0) = 0$ y $X(L) = 0$, verificando que $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$ y que las funciones propias son cosenos.
9. Multiplicando la ecuación de Sturm–Liouville por X e integrando por partes en (a, b) , deducir el **cociente de Rayleigh**

$$\lambda = \frac{[-pX'X]_a^b + \int_a^b (p(X')^2 - qX^2) dx}{\int_a^b X^2 w dx},$$

y usarlo para probar que si $q \leq 0$ y las condiciones de borde son de Dirichlet, entonces todos los valores propios son positivos.

10. Para $x^2 X'' + 3xX' + \lambda X = 0$ en $(1, e)$ con $X(1) = X(e) = 0$, encontrar p , w , los valores propios y las funciones propias.
11. Calcular la serie de Fourier de $f(x) = |x|$ en $(-\pi, \pi)$ y deducir que $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
12. Calcular la serie de senos y la serie de cosenos de $f(x) = 1$ en $(0, L)$.
13. Para $f(x) = x^2$ en $(-\pi, \pi)$, calcular la serie de Fourier y evaluarla en $x = \pi$ para obtener $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$. Aplicar Parseval y calcular el valor de $\sum_{n \geq 1} 1/n^4$.
14. Decidir en cuáles de los ejercicios 11, 12 y 13 la convergencia de la serie de Fourier es uniforme.
15. Resolver la ecuación de onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ en $(0, L)$ con extremos fijos y datos iniciales $\varphi(x) = \sin(\frac{3\pi}{L}x)$, $\psi(x) = \sin(\frac{\pi}{L}x)$, y describir el movimiento resultante.
16. Una cuerda con extremos fijos se levanta en $x = L/3$ hasta una altura h y se suelta, de modo que $\psi \equiv 0$ y

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{3h}{L}x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{L}{3}, \\ \frac{3h}{2L}(L-x) & \text{si } \frac{L}{3} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Calcular los coeficientes de la solución y determinar qué armónicos se anulan.

17. Resolver la ecuación de onda en $(0, L)$ con extremos libres $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$ y datos φ , ψ . ¿Qué representa el término correspondiente a $\lambda_0 = 0$?
18. Probar que si φ y ψ se anulan fuera de un intervalo $[a, b] \subseteq (0, L)$, entonces la solución de la ecuación de onda con extremos fijos cumple $u(x, t) = 0$ mientras $ct < \min\{a, L - b\}$ y x esté fuera del intervalo.
19. Resolver $\Delta u = 0$ en $(0, \pi) \times (0, \pi)$ con $u = 0$ en tres lados y $u(x, \pi) = \sin(2x)$.
20. Resolver el problema de Dirichlet en el disco de radio R con $f(\theta) = 1 + \cos \theta$, y verificar directamente que la solución es armónica.
21. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, acotado y conexo. Probar que si u es armónica en Ω y alcanza su máximo en un punto interior, entonces u es constante.
22. Encontrar la solución estacionaria de $u_t = \alpha \Delta u$ en el anillo $R_1 < r < R_2$ con $u = T_1$ en $r = R_1$ y $u = T_2$ en $r = R_2$, suponiendo que no depende de θ .