

GUIA 1 DE EJERCICIOS (MAT70625)

PEDRO MONTERO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Salvo mención contraria, $\alpha > 0$ y $c > 0$ son constantes, $\mathbf{n}$ denota el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$, y todas las funciones involucradas se suponen tan regulares como sea necesario para justificar los cálculos.

1. Determinar el orden de cada EDP, y decidir si es lineal y si es homogénea:

$$u_t = u_{xx} + u, \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} + \sin(t), \quad u_x u_y = u, \quad \Delta^2 u = 0.$$

2. Encontrar la solución general de $u_{xy} = x^2 y$ en $\mathbb{R}^2$.
3. Sea u solución de $u_t = \alpha \Delta u$ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ con condición de **Neumann homogénea** $\partial u / \partial \mathbf{n} = 0$ en $\partial\Omega$. Probar, usando la forma normal del Teorema de Green, que la *energía total* se conserva:

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega} u \, dA = 0.$$

4. Repetir la deducción de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^3$, usando el **Teorema de Gauss** en lugar del Teorema de Green.
5. (*Cultura general*) Probar que el **núcleo del calor**

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-x^2/(4\alpha t)}$$

resuelve $u_t = \alpha u_{xx}$ para $t > 0$, y calcular $\int_{\mathbb{R}} H_t(x) \, dx$. (*Lo reencontraremos en la Unidad III, vía transformada de Fourier.*)

6. Clasificar $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$ y $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x = 0$.
7. Clasificar las siguientes EDP, indicando la región del plano cuando el tipo cambie:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0, \quad u_{xx} - x^2 u_{yy} + u_y = 0, \quad u_{xx} + 2u_{xy} + (1-y)u_{yy} = 0.$$

8. Repetir el balance vertical de la deducción de la ecuación de onda, ahora incluyendo el peso de la cuerda, y deducir que $u_{tt} = c^2 u_{xx} - g$. Encontrar la posición de equilibrio ($u_{tt} = 0$) con extremos fijos a la misma altura.
9. Sea u solución de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ en $(0, L)$ con $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Probar que la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2) \, dx$$

es constante, derivando bajo la integral e integrando por partes. Deducir que el problema tiene a lo más una solución.

10. Dibujar el perfil de $u(x, t) = e^{-(x-t)^2} + \sin(x+t)$ para $t = 0$ y $t = 1$, y verificar que resuelve $u_{tt} = u_{xx}$.
11. Para $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ en $(0, L)$ con $u(0, t) = A$ y $u(L, t) = B$ constantes, encontrar G que homogeneice ambas condiciones de borde sin ensuciar la EDP.
12. Resolver $u_t + c u_x = -\lambda u$ con $u(x, 0) = f(x)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante. *Indicación: escribir la EDO que satisface $g(s) = u(x_0 + cs, s)$.*
13. Resolver por características $u_t + x u_x = 0$ con $u(x, 0) = f(x)$. ¿Son rectas las características? *Indicación: ahora $x'(s) = x(s)$.*

14. Resolver $u_{tt} = 4u_{xx}$ en $\mathbb{R}$ con $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $\psi(x) = 0$, y luego con $\varphi(x) = 0$ y $\psi(x) = \cos(x)$.
15. Probar que si φ y ψ son impares, entonces la solución de d'Alembert cumple $u(0, t) = 0$ para todo t . ¿Qué ocurre si ambas son pares?
16. Deducir la fórmula de d'Alembert integrando directamente $u_{\xi\eta} = 0$ en las variables $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, e imponiendo después las condiciones iniciales.
17. Calcular la solución de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t)$ con $F \equiv 1$ y datos iniciales nulos, evaluando la integral sobre el triángulo característico $\Delta(x, t)$. Verificar el resultado en la EDP.