

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 18

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

7 de octubre de 2026

§48. El Lema de Jordan

Recuerdo (integrales de Fourier)

Sea $f = \frac{P}{Q}$ con P, Q polinomios tales que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ y Q no posee ceros reales, sean a_j los ceros de Q y sea $\omega \geq 0$. Si $z = x + iy$ con $y \geq 0$ entonces $|e^{i\omega z}| = e^{-\omega y} \leq 1$, luego la integral de $f(z) e^{i\omega z}$ sobre el semicírculo superior C_R tiende a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$, y se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_j) > 0} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, a_j) \quad (\omega \geq 0).$$

Si $\omega \leq 0$ se usa el **semicírculo inferior**, y la integral es $-2\pi i$ por la suma de los residuos de $f(z) e^{i\omega z}$ en el **semiplano inferior**.

Ejemplo: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+1} dx = \pi e^{-|\omega|}$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

El Lema de Jordan

Si $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ sólo se tiene $|f(z)| \leq \frac{K}{R}$ sobre C_R para algún $K > 0$, y la cota ML da $\frac{K}{R} \cdot \pi R = \pi K$, que **no tiende a 0**. El siguiente acotamiento es bastante útil en la práctica.

Lema de Jordan

Sea $\omega > 0$ y sea f continua sobre C_R , con $|f(z)| \leq M_R$ allí. Entonces

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{i\omega z} dz \right| \leq \frac{\pi}{\omega} M_R.$$

Idea de la prueba: con $z = Re^{it}$ se tiene $|e^{i\omega z}| = e^{-\omega R \sin(t)}$, y la desigualdad $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (**Ejercicio**) da $\int_0^\pi e^{-\omega R \sin(t)} dt \leq \frac{\pi}{\omega R}$. $\square$

En particular, si $M_R \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow +\infty$, la integral sobre C_R tiende a 0.

El caso $\deg(Q) = \deg(P) + 1$

Sea $f = \frac{P}{Q}$ con Q sin ceros reales y $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$, y sea $\omega > 0$. Sobre C_R se tiene $|f(z)| \leq \frac{K}{R}$, luego por el Lema de Jordan la integral de $f(z) e^{i\omega z}$ sobre C_R tiende a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$, y se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a_j) > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\omega z}, a_j) \quad (\omega > 0).$$

Aquí, la integral se define como $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) e^{i\omega x} dx$.

Ejemplo: para $a > 0$, el único polo de $\frac{z e^{iz}}{z^2 + a^2}$ en el semiplano superior es ia , con residuo $\frac{ia e^{-a}}{2ia} = \frac{e^{-a}}{2}$. Así, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + a^2} dx = i\pi e^{-a}$, y tomando parte imaginaria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}.$$

§49. Polos en el eje real

Valor principal

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y sea f continua en $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. El **valor principal** de la integral de f es

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \left(\int_{-R}^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^R f(x) dx \right),$$

cuando el límite existe. Si la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge, coincide con su valor principal.

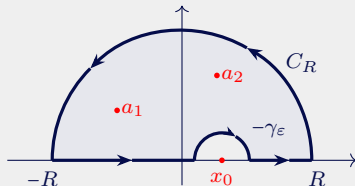
Ejemplo: la integral $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ no converge, dado que $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = -\ln(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Sin embargo, como la función $x \mapsto \frac{1}{x}$ es impar,

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^R \frac{dx}{x} = 0 \quad \implies \quad \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} = 0.$$

El valor principal puede existir aunque la integral no converja.

Un polo simple en el eje real

Sea g holomorfa en un abierto que contiene al semiplano $\{\operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, salvo en un polo simple $x_0 \in \mathbb{R}$ y en los puntos $a_1, \dots, a_k$ del semiplano superior. Para evitar x_0 se usa el camino de la figura, donde γ_ε es el semicírculo superior de radio ε centrado en x_0 , recorrido en sentido antihorario.



Escribiendo $g(z) = \frac{c}{z-x_0} + h(z)$ con $c = \operatorname{Res}(g, x_0)$ y h holomorfa (luego acotada) cerca de x_0 , y $z = x_0 + \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0, \pi]$, se obtiene

$$\int_{\gamma_\varepsilon} g(z) dz = c \int_0^\pi i dt + \int_{\gamma_\varepsilon} h(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} i\pi \operatorname{Res}(g, x_0).$$

Un polo simple en el eje real (fórmula)

En el camino anterior γ_ε se recorre en sentido horario, y el Teorema de los residuos da

$$\int_{-R}^{x_0-\varepsilon} g + \int_{x_0+\varepsilon}^R g = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(g, a_j) + \int_{\gamma_\varepsilon} g - \int_{C_R} g.$$

Si la integral de g sobre C_R tiende a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$, tomando además $\varepsilon \rightarrow 0^+$ se obtiene:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(g, a_j) + i\pi \operatorname{Res}(g, x_0).$$

Es decir, el polo x_0 aporta $i\pi \operatorname{Res}(g, x_0)$, **la mitad** de lo que aporta un polo del semiplano superior.

Del mismo modo, si g posee **varios polos simples** en el eje real, **cada uno aporta $i\pi$ por su residuo**.

La integral de $\sin(x)/x$

La función $g(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ no posee polos en el semiplano superior, y posee un polo simple en $x_0 = 0$ con $\text{Res}(g, 0) = 1$. Sobre C_R se tiene $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{R}$, luego por el Lema de Jordan la integral de g sobre C_R tiende a 0, y la fórmula anterior da

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi.$$

Tomando parte imaginaria se obtiene $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi$ (el integrando posee una singularidad removible en 0), y como es par:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

La parte real da $\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx = 0$, pero $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x} dx$ no converge.

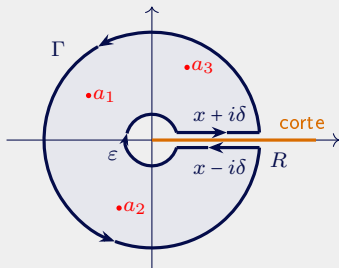
Ejercicio Probar que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega x)}{x} dx$ vale $\frac{\pi}{2}$ si $\omega > 0$ y $-\frac{\pi}{2}$ si $\omega < 0$.

§50. Integrales con x^α y con $\ln(x)$

La rama $\log_\pi$

Sea $\log_\pi(z) = \ln|z| + i \arg_\pi(z)$ la rama del logaritmo definida en $\Omega_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}$, donde $\arg_\pi(z) \in]0, 2\pi[$ (ver Clase 10). Para $x > 0$, sus límites por cada lado del corte difieren en $2\pi i$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \log_\pi(x + i\delta) = \ln(x), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \log_\pi(x - i\delta) = \ln(x) + 2\pi i.$$



Sea Γ el camino cerrado de la figura: dos segmentos a distancia δ del corte, y dos arcos de círculo de radios ε y R . Si ε, δ son pequeños y R es grande, Γ encierra a los puntos $a_1, \dots, a_k \in \Omega_\pi$ dados.

Integrales con x^α

Sea $f = \frac{P}{Q}$ con Q sin ceros en $[0, +\infty[$, y sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tal que $-1 < \alpha < d-1$, donde $d := \deg(Q) - \deg(P)$.

Con $z^\alpha := \exp(\alpha \log_\pi(z))$ se tiene, para $x > 0$, $(x+i\delta)^\alpha \rightarrow x^\alpha$ y $(x-i\delta)^\alpha \rightarrow x^\alpha e^{2\pi i \alpha}$ cuando $\delta \rightarrow 0^+$, y en el límite los dos segmentos de Γ aportan

$$\int_\varepsilon^R f(x) x^\alpha dx + \int_R^\varepsilon f(x) x^\alpha e^{2\pi i \alpha} dx = (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_\varepsilon^R f(x) x^\alpha dx.$$

Las integrales sobre los arcos de radios ε y R tienden a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ y $R \rightarrow +\infty$ (cota ML), y el Teorema de los residuos da:

$$\int_0^{+\infty} f(x) x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_j \operatorname{Res}(f(z) z^\alpha, a_j),$$

donde a_j recorre los ceros de Q .

Un ejemplo con $0 < \alpha < 1$

Para $0 < \alpha < 1$, la fórmula anterior con $f(z) = \frac{1}{1+z}$ y exponente $\alpha-1 \in]-1, 0[$ da

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i \alpha}} \operatorname{Res} \left(\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}, -1 \right).$$

Como $\log_{\pi}(-1) = i\pi$, el residuo es $(-1)^{\alpha-1} = e^{i\pi(\alpha-1)} = -e^{i\pi\alpha}$, luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{-2\pi i e^{i\pi\alpha}}{1-e^{2\pi i \alpha}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}},$$

es decir:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1.$$

Los residuos se calculan con la **misma rama** $\log_{\pi}$ usada sobre Γ .

Integrales con $\ln(x)$

Sea $f = \frac{P}{Q}$ con Q sin ceros en $[0, +\infty[$ y $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$, y sean a_j los ceros de Q . Sobre el mismo camino Γ se integra $(\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z)$. Cuando $\delta \rightarrow 0^+$, los dos segmentos aportan

$$\int_{\varepsilon}^R \left[(\ln(x) - i\pi)^2 - (\ln(x) + i\pi)^2 \right] f(x) dx = -4\pi i \int_{\varepsilon}^R f(x) \ln(x) dx,$$

y las integrales sobre los arcos tienden a 0. El Teorema de los residuos da:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_j \operatorname{Res} \left((\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z), a_j \right).$$

Ejemplo: para $a > 0$, los polos de $\frac{1}{z^2 + a^2}$ son $\pm ia$, con $\log_\pi(ia) = \ln(a) + i\frac{\pi}{2}$ y $\log_\pi(-ia) = \ln(a) + i\frac{3\pi}{2}$. Luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + a^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(\ln(a) - i\frac{\pi}{2})^2 - (\ln(a) + i\frac{\pi}{2})^2}{2ia} = \frac{\pi}{2a} \ln(a).$$

Ejercicios

- 1 Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(x)}{x^2-2x+2} dx$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2-2x+2} dx$.
- 2 Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} dx$.
- 3 Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx$.
- 4 Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)(x+2)} dx$.

Hoy

- Lema de Jordan: si $\omega > 0$ y $|f| \leq M_R$ sobre C_R , entonces $\left| \int_{C_R} f(z) e^{i\omega z} dz \right| \leq \frac{\pi}{\omega} M_R$. Así, la fórmula de las integrales de Fourier vale para $\omega > 0$ si $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$.
- Un polo simple x_0 en el eje real aporta $i\pi \operatorname{Res}(g, x_0)$ al valor principal, y $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.
- Con la rama $\log_\pi$ se tiene $\int_0^{+\infty} f(x) x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i \alpha}} \sum_j \operatorname{Res}(f(z) z^\alpha, a_j)$.
- $\int_0^{+\infty} f(x) \ln(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_j \operatorname{Res}((\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z), a_j)$.

Próxima clase

Ejercicios.

Gracias por su atención