

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 17

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

5 de octubre de 2026

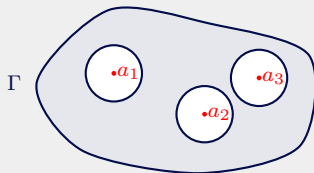
§45. Funciones racionales en $\mathbb{R}$

Recuerdo (Teorema de los residuos)

Teorema de los residuos

Sea Γ un camino cerrado simple antihorario y sea f holomorfa en un abierto que contiene a Γ y a su interior, salvo en los puntos $a_1, \dots, a_k$ del interior de Γ . Entonces

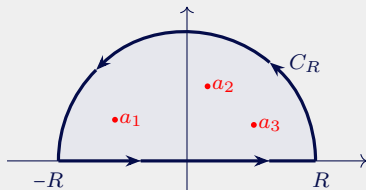
$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, a_j).$$



Si z_0 es un cero simple de v , el residuo de $\frac{u}{v}$ en z_0 es $\frac{u(z_0)}{v'(z_0)}$, y en un polo de orden m de f el residuo es $\frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$, donde $g(z) := (z - z_0)^m f(z)$.

El semidisco de radio R

Sea $f = \frac{P}{Q}$ con P, Q polinomios tales que Q **no posee ceros reales**, y sean $a_1, \dots, a_k$ los ceros de Q en el semiplano superior. Para $R > 0$ tal que $|a_j| < R$ para todo j , sea C_R el semicírculo superior de radio R centrado en el origen, recorrido en sentido antihorario.



El segmento $[-R, R]$ seguido de C_R es un camino cerrado simple antihorario que encierra a los puntos $a_1, \dots, a_k$, y el Teorema de los residuos da

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, a_j).$$

Funciones racionales en $\mathbb{R}$

Si además $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge y la integral sobre C_R tiende a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$ (ver Clase 13). Como el lado derecho de la identidad anterior no depende de R , se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a_j) > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, a_j\right).$$

Algoritmo

- 1 Verificar que Q no posee ceros reales y que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$.
- 2 Determinar los ceros a_j de Q en el semiplano superior $\{\operatorname{Im}(z) > 0\}$.
- 3 Calcular el residuo de $\frac{P}{Q}$ en cada a_j , sumar y multiplicar por $2\pi i$.

Ejemplos

- ❶ El único polo de $\frac{1}{z^2+1}$ en el semiplano superior es i , con residuo $\frac{1}{2i}$, luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi,$$

que coincide con $[\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty}$.

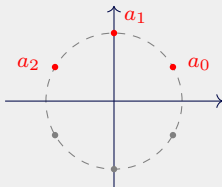
- ❷ Los polos de $\frac{1}{z^4+1}$ en el semiplano superior son $z_0 = e^{i\pi/4}$ y $z_1 = e^{i3\pi/4}$, y por la clase anterior $\text{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, z_k\right) = -\frac{z_k}{4}$. Como $z_0 + z_1 = i\sqrt{2}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \left(-\frac{z_0 + z_1}{4} \right) = 2\pi i \cdot \frac{-i\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Un ejemplo en $[0, +\infty[$

La función $x \mapsto \frac{x^2}{x^6+1}$ es par, luego $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx$.

Los ceros de $z^6 + 1$ son las seis raíces sextas de -1 , y las del semiplano superior son $a_0 = e^{i\pi/6}$, $a_1 = i$ y $a_2 = e^{i5\pi/6}$.



Los a_k son polos simples, con $\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^6+1}, a_k\right) = \frac{a_k^2}{6a_k^5} = \frac{1}{6a_k^3}$. Como $a_0^3 = a_2^3 = i$ y $a_1^3 = -i$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i} \right) = \frac{\pi}{3} \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx = \frac{\pi}{6}.$$

§46. Funciones racionales trigonométricas

Funciones racionales trigonométricas

Sea $F(x, y)$ un cociente de polinomios en dos variables cuyo denominador no se anula sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Sobre $\Gamma(0, 1)$, con $z = e^{it}$ y $t \in [0, 2\pi]$, se tiene $dz = iz dt$ y

$$\cos(t) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin(t) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Definimos la función racional

$$g(z) := \frac{1}{z} F \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right),$$

de modo que $\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) dt = \frac{1}{i} \int_{\Gamma(0,1)} g(z) dz$. Así:

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) dt = 2\pi \sum_{|a_j| < 1} \text{Res}(g, a_j),$$

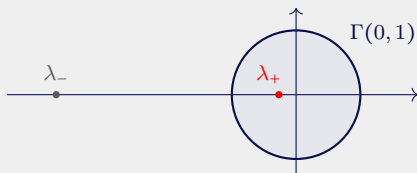
donde a_j recorre los polos de g en el disco $D(0, 1)$.

Un ejemplo con un polo simple

Para $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos(t)}$ se tiene $F(x, y) = \frac{1}{2+x}$, y

$$g(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z^2 + 4z + 1}.$$

Los ceros de $z^2 + 4z + 1$ son $\lambda_{\pm} = -2 \pm \sqrt{3}$, y sólo $\lambda_+ \approx -0,27$ pertenece al disco $D(0, 1)$.



El punto λ_+ es un polo simple de g , con $\text{Res}(g, \lambda_+) = \frac{2}{2\lambda_++4} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, luego

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos(t)} = 2\pi \text{Res}(g, \lambda_+) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Un ejemplo con un polo doble

Para $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos(t))^2}$ se tiene, con las mismas raíces $\lambda_{\pm} = -2 \pm \sqrt{3}$,

$$g(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} = \frac{4z}{(z^2 + 4z + 1)^2} = \frac{4z}{(z - \lambda_+)^2(z - \lambda_-)^2},$$

que posee un polo doble en λ_+ . Con $h(z) := (z - \lambda_+)^2 g(z) = \frac{4z}{(z - \lambda_-)^2}$ se tiene

$$h'(z) = -\frac{4(z + \lambda_-)}{(z - \lambda_-)^3},$$

y como $\lambda_+ + \lambda_- = -4$ y $\lambda_+ - \lambda_- = 2\sqrt{3}$,

$$\text{Res}(g, \lambda_+) = h'(\lambda_+) = \frac{16}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \implies \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos(t))^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

§47. Integrales de Fourier

Integrales de Fourier

En el Análisis de Fourier aparecen integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

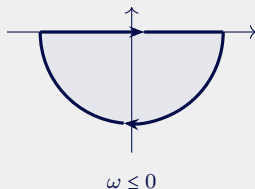
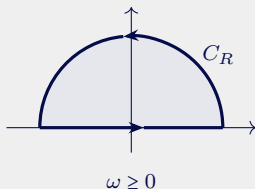
Sea $f = \frac{P}{Q}$ con Q sin ceros reales y $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$, y sea $\omega \geq 0$. Si $z = x + iy$ con $y \geq 0$ entonces $|e^{i\omega z}| = e^{-\omega y} \leq 1$ (ver Clase 10), luego la integral de $f(z) e^{i\omega z}$ sobre C_R también tiende a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$. Así:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_j) > 0} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, a_j) \quad (\omega \geq 0).$$

Observación: las integrales de $f(x) \cos(\omega x)$ y de $f(x) \sin(\omega x)$ se calculan como parte real e imaginaria de la anterior (si P, Q poseen coeficientes reales), y **no usando** $f(z) \cos(\omega z)$, dado que $\cos(\omega z)$ no es acotada en el semiplano superior.

El semiplano inferior

Si $\omega \leq 0$ y $z = x + iy$ con $y \leq 0$, entonces $|e^{i\omega z}| = e^{-\omega y} \leq 1$. Se usa entonces el semicírculo inferior de radio R , recorrido de R a $-R$.



El segmento $[-R, R]$ seguido del semicírculo inferior es un camino cerrado simple **horario**, luego el Teorema de los residuos se aplica con el signo opuesto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im}(a_j) < 0} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, a_j) \quad (\omega \leq 0),$$

donde a_j recorre los ceros de Q en el semiplano inferior.

Un ejemplo con parámetro

Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Los polos de $f(z)e^{i\omega z}$ son $\pm i$, con residuos

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2+1}, i\right) = \frac{e^{-\omega}}{2i}, \quad \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2+1}, -i\right) = -\frac{e^{\omega}}{2i}.$$

Luego $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$ vale $2\pi i \cdot \frac{e^{-\omega}}{2i} = \pi e^{-\omega}$ si $\omega \geq 0$, y $-2\pi i \cdot \left(-\frac{e^{\omega}}{2i}\right) = \pi e^{\omega}$ si $\omega \leq 0$, es decir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+1} dx = \pi e^{-|\omega|} \quad \text{para todo } \omega \in \mathbb{R}.$$

Tomando parte real e imaginaria,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2+1} dx = \pi e^{-|\omega|}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega x)}{x^2+1} dx = 0.$$

Por ejemplo, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}$ (la función $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2+1}$ no posee primitiva elemental).

- 1 Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ y $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$.
- 2 Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$.
- 3 Probar que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ para todo $a > 1$, y calcular $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\sin(t)}$.
- 4 Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2+a^2} dx$ para $a > 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$.

Hoy

- Si Q no posee ceros reales y $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ es $2\pi i$ por la suma de los residuos de $\frac{P}{Q}$ en el semiplano superior.
- Con $z = e^{it}$, la integral $\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) dt$ es 2π por la suma de los residuos de $g(z) = \frac{1}{z} F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$ en el disco $D(0, 1)$.
- Para $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$ se usa el semiplano superior si $\omega \geq 0$, y el inferior con el signo opuesto si $\omega \leq 0$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+1} dx = \pi e^{-|\omega|}$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Próxima clase

Lema de Jordan, polos en el eje real e integrales con x^α y $\ln(x)$.

Gracias por su atención