

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 16

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

30 de septiembre de 2026

§42. Residuos

Recuerdo (polos de un cociente)

Si $f = \frac{u}{v}$ con u, v holomorfas cerca de z_0 y $v(z_0) = 0$. Si u posee un cero de orden k en z_0 ($k = 0$ si $u(z_0) \neq 0$) y v uno de orden $m \geq 1$, escribiendo $u = (z - z_0)^k \tilde{u}$ y $v = (z - z_0)^m \tilde{v}$ con $\tilde{u}(z_0) \neq 0$ y $\tilde{v}(z_0) \neq 0$ se tiene $\frac{u}{v} = (z - z_0)^{k-m} \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}$, es decir:

$\frac{u}{v}$ posee un **polo de orden** $m - k$ en z_0 si $k < m$, y una **singularidad removable** si $k \geq m$.

- ❶ $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ posee polos simples en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ (allí $\cos$ posee ceros simples y $\sin$ no se anula).
- ❷ $\frac{1}{e^z - 1}$ posee polos simples en $2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- ❸ $\frac{\sin(z)}{z^4}$ posee un polo de orden 3 en el origen, y $\frac{1 - \cos(z)}{z^2}$ una singularidad removable.

El residuo

Sea z_0 una singularidad aislada de f y sea

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad (0 < |z - z_0| < r)$$

su serie de Laurent. El **residuo** de f en z_0 es el coeficiente de $\frac{1}{z - z_0}$, es decir,

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}.$$

La fórmula del Teorema de Laurent con $n = -1$ da, para todo $0 < \varepsilon < r$,

$$\int_{\Gamma(z_0, \varepsilon)} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0).$$

En una singularidad removible el residuo es nulo. Por la clase anterior:

$$\text{Res}\left(e^{1/z}, 0\right) = 1, \quad \text{Res}\left(\frac{e^z}{z^3}, 0\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{Res}\left(\frac{1}{z^2 \sin(z)}, 0\right) = \frac{1}{6}.$$

§43. Cálculo de residuos

Polos simples

Si z_0 es un polo simple, entonces $(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + \dots$, luego

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

El siguiente caso es bastante útil en la práctica: si $f = \frac{u}{v}$ con u, v holomorfas cerca de z_0 , $v(z_0) = 0$ y $v'(z_0) \neq 0$, entonces

$$\operatorname{Res}\left(\frac{u}{v}, z_0\right) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}.$$

En efecto, $(z - z_0) \frac{u(z)}{v(z)} = u(z) \cdot \frac{z - z_0}{v(z) - v(z_0)} \rightarrow \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}$ cuando $z \rightarrow z_0$.

Ejemplo: $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ posee polos simples en $z_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, y

$$\operatorname{Res}(\tan(z), z_0) = \frac{\sin(z_0)}{-\sin(z_0)} = -1.$$

Dos ejemplos en polos simples

- ❶ La función $\frac{e^{iz}}{z^2+1}$ posee polos simples en $\pm i$, y

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right) = \frac{e^{i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2i}, \quad \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, -i\right) = \frac{e^{-i \cdot i}}{-2i} = -\frac{e}{2i}.$$

- ❷ La función $\frac{1}{z^4+1}$ posee polos simples en las cuatro raíces z_k de $z^4 = -1$, y como $z_k^4 = -1$:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, z_k\right) = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}.$$

Por ejemplo, en $e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ el residuo es $-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$.

Polos de orden m

Si z_0 es un polo de orden m , la función

$$g(z) := (z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \cdots$$

es holomorfa cerca de z_0 , y a_{-1} es el coeficiente de $(z - z_0)^{m-1}$ en su serie de Taylor, es decir, $\frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right].$$

Ejemplo: $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}$ posee un polo doble en 0 y uno simple en 1. Con $g(z) = z^2 f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ se tiene $g'(z) = \frac{(z-2)e^z}{(z-1)^2}$, luego

$$\text{Res}(f, 0) = g'(0) = -2, \quad \text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z}{z^2} = e.$$

Residuos a partir de la serie de Laurent

En una singularidad esencial el residuo se obtiene de la serie de Laurent. Por ejemplo, para todo $z \in \mathbb{C}^*$,

$$z^2 e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{24z^2} + \dots \quad \Longrightarrow \quad \text{Res}\left(z^2 e^{1/z}, 0\right) = \frac{1}{6}.$$

Notar que $\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} - \dots$ posee una singularidad esencial en 0 y residuo nulo.

En un polo de orden alto también puede convenir desarrollar: la función $\frac{1}{z^2 \sin(z)}$ posee un polo de orden 3 en 0, y en vez de derivar dos veces $\frac{z}{\sin(z)}$ se puede deducir $a_{-1} = \frac{1}{6}$ de su serie de Laurent (ver Clase 15).

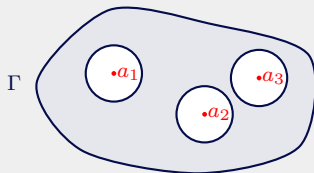
§44. El Teorema de los residuos

El Teorema de los residuos

Teorema de los residuos

Sea Γ un camino cerrado simple antihorario y sea f holomorfa en un abierto que contiene a Γ y a su interior, salvo en los puntos $a_1, \dots, a_k$ del interior de Γ . Entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f, a_j).$$



Prueba: la integral sobre Γ es la suma de las integrales sobre círculos $\Gamma(a_j, \varepsilon)$ disjuntos (ver Clase 14), y cada una vale $2\pi i \operatorname{Res}(f, a_j)$. $\square$

Dos casos particulares

Dos fórmulas de la Clase 14 son casos particulares del teorema:

- ❶ Si g es holomorfa en un abierto que contiene a Γ y a su interior, y z_0 está en el interior de Γ , el residuo de $\frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ en z_0 es el coeficiente de $(z-z_0)^n$ en la serie de Taylor de g , es decir, $\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$, y se recupera

$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

- ❷ Para una función racional $\frac{P}{Q}$, el residuo en a_j es el coeficiente $c_{j,1}$ de $\frac{1}{z-a_j}$ en su descomposición en fracciones parciales, y se recupera

$$\int_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{a_j \text{ encerrado por } \Gamma} c_{j,1}.$$

Ejemplos

- ① $\int_{\Gamma(0,2)} \frac{e^z}{z^2(z-1)} dz = 2\pi i (-2 + e)$, pues 0 y 1 están en el interior.
- ② $\int_{\Gamma(0,2)} \tan(z) dz = 2\pi i (-1 - 1) = -4\pi i$, pues de los polos $\frac{\pi}{2} + k\pi$ sólo $\pm \frac{\pi}{2}$ están en el interior.
- ③ $\int_{\Gamma(0,1)} e^{1/z} dz = 2\pi i$ y $\int_{\Gamma(0,1)} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0$.
- ④ Si Γ es el borde del cuadrado de vértices $\pm 2 \pm 2i$, recorrido en sentido antihorario, los polos $\pm i$ están en su interior y

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{2i} - \frac{e}{2i} \right) = \pi (e^{-1} - e).$$

Un ejemplo con suma nula

La función $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^4}$ posee un polo simple en 0 y un polo de orden 4 en 2, con residuos

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-2)^4} = \frac{1}{16},$$

$$\operatorname{Res}(f, 2) = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d^3}{dz^3} \left[\frac{1}{z} \right] = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{6}{2^4} \right) = -\frac{1}{16}.$$

Como $\Gamma(0, 3)$ encierra ambos polos y $\Gamma(2, 1)$ sólo encierra a 2,

$$\int_{\Gamma(0,3)} \frac{dz}{z(z-2)^4} = 2\pi i \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right) = 0, \quad \int_{\Gamma(2,1)} \frac{dz}{z(z-2)^4} = -\frac{\pi i}{8}.$$

Cultura general: el residuo en infinito

Si f es holomorfa en $|z| > R$, se define

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0,r)} f(z) dz \quad (r > R),$$

es decir, menos el coeficiente de $\frac{1}{z}$ en la serie de Laurent de f en $|z| > R$. Aquí, el signo menos viene motivado de la regla de la mano derecha.

Si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en un número finito de puntos, el Teorema de los residuos sobre $\Gamma(0,r)$, con r grande, da:

La suma de todos los residuos de f , incluido el de ∞ , es nula.

Por ejemplo, en $|z| > 2$ se tiene

$$\frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{1}{z^5} \left(1 - \frac{2}{z}\right)^{-4} = \frac{1}{z^5} + \frac{8}{z^6} + \dots,$$

luego su residuo en ∞ es nulo (comparar con el ejemplo anterior).

- 1 Calcular el residuo de $\frac{z+1}{z^2(z-2)}$ en cada una de sus singularidades.
- 2 Calcular el residuo de $\frac{1}{\sinh(z)}$ en cada uno de sus polos.
- 3 Calcular $\int_{\Gamma(0,2)} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ y $\int_{\Gamma(0,1)} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$.
- 4 Calcular $\int_{\Gamma(0,4)} \frac{dz}{z^2 \sin(z)}$.

Hoy

- El residuo $\text{Res}(f, z_0)$ es el coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent en z_0 , y $\int_{\Gamma(z_0, \varepsilon)} f dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0)$.
- En un polo simple de $\frac{u}{v}$ el residuo es $\frac{u(z_0)}{v'(z_0)}$, y en un polo de orden m se deriva $m - 1$ veces $(z - z_0)^m f(z)$.
- En una singularidad esencial, y a veces en un polo de orden alto, el residuo se lee en la serie de Laurent.
- Teorema de los residuos: $\int_{\Gamma} f dz$ es $2\pi i$ por la suma de los residuos de f en el interior de Γ .

Próxima clase

Cálculo de integrales reales mediante residuos.

Gracias por su atención