

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 15

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

28 de septiembre de 2026

§39. Series de Laurent

Recuerdo (fórmula integral de Cauchy)

Sea Ω abierto simplemente conexo, f holomorfa en Ω , $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino cerrado simple antihorario y z_0 un punto del interior de Γ . Derivando bajo el signo integral en la fórmula integral de Cauchy se obtiene

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Toda función holomorfa posee entonces derivadas de todo orden, y en particular es de clase C^∞ .

Desarrollando $\frac{1}{z - z_0}$ con la serie geométrica dentro de un disco $D(z_0, \rho)$ contenido en Ω se obtiene además que **toda función holomorfa es analítica**, con radio al menos $\text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ (ver Clase 12), y los coeficientes de su serie de Taylor en z_0 son

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

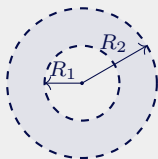
Series de Laurent

Una **serie de Laurent** centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n}_{\text{parte positiva}} + \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{parte negativa}},$$

y decimos que **converge** si ambas partes convergen.

La parte positiva converge en un disco $|z - z_0| < R_2$, y la parte negativa, que es una serie de potencias en $w = \frac{1}{z - z_0}$, converge en una región $|z - z_0| > R_1$. Así, la serie converge en el anillo $A(z_0; R_1, R_2)$, y su suma es holomorfa ahí.



Ejemplo: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^n} + \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^n}$ converge en $A(0; 1, 2)$, y su suma es $\frac{1}{z-1} + \frac{2}{2-z}$.

El Teorema de Laurent

Teorema (Laurent)

Sea f holomorfa en el anillo $A(z_0; R_1, R_2)$, con $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$.
Entonces

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad \text{para todo } z \in A(z_0; R_1, R_2),$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ y todo } R_1 < r < R_2.$$

El desarrollo es **único** (integrando término a término sobre $\Gamma(z_0, r)$).

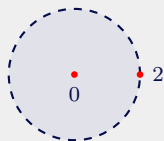
Si f es holomorfa en todo el disco $D(z_0, R_2)$, el Teorema de Cauchy anula los a_n con $n < 0$ y se recupera la serie de Taylor.

En la práctica los a_n **no** se calculan con la integral: por la unicidad, basta escribir f como una serie de Laurent en el anillo, por cualquier método.

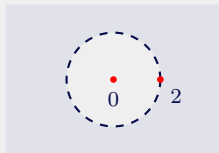
§40. Cálculo de series de Laurent

Un ejemplo en dos anillos

La función $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$, que contiene a los anillos $A(0; 0, 2)$ y $A(0; 2, +\infty)$:



$$0 < |z| < 2$$



$$|z| > 2$$

Por fracciones parciales,

$$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z} \right),$$

y basta desarrollar $\frac{1}{z-2}$ con la serie geométrica, de manera distinta en cada anillo.

Un ejemplo en dos anillos (cálculo)

En $0 < |z| < 2$ se tiene $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, luego

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = -\frac{1}{2z} - \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^{n+2}}.$$

En $|z| > 2$ se tiene $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$, luego

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1}}{z^{n+1}} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \dots$$

La misma función posee desarrollos distintos en anillos distintos: la serie de Laurent depende del anillo, y no sólo del centro z_0 .

Ejercicio Desarrollar f en serie de Laurent en el anillo $0 < |z-2| < 2$.

Sustitución en series conocidas

Reemplazando z por $\frac{1}{z}$ en la serie de e^z (cambio de variable) se obtiene, para todo $z \in \mathbb{C}^*$,

$$e^{1/z} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \dots,$$

cuya parte negativa posee **infinitos** términos no nulos.

Del mismo modo, dividiendo series conocidas por una potencia de z , para todo $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots, \quad \frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6} + \frac{z}{24} + \dots$$

La primera no posee parte negativa, y la parte negativa de la segunda posee tres términos.

Cociente de series

La función $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(z)}$ es holomorfa en $0 < |z| < \pi$ (los otros ceros de $\sin(z)$ son $\pm\pi, \pm 2\pi, \dots$). Factorizando

$$\sin(z) = z(1 - w), \quad w := \frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + \dots,$$

se tiene $f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-w}$, y la serie geométrica $\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \dots$ da, hasta el término en z^4 ,

$$\frac{1}{1-w} = 1 + \frac{z^2}{6} + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120} \right) z^4 + \dots = 1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + \dots$$

$$\frac{1}{z^2 \sin(z)} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \frac{7z}{360} + \dots \quad \text{para todo } 0 < |z| < \pi.$$

§41. Singularidades aisladas

Singularidades aisladas

Decimos que z_0 es una **singularidad aislada** de f si f es holomorfa en $A(z_0; 0, r) = \{0 < |z - z_0| < r\}$ para algún $r > 0$. Ahí f admite serie de Laurent, y según su parte negativa decimos que z_0 es:

- ❶ una **singularidad removible**, si la parte negativa es nula;
- ❷ un **polo de orden** $m \geq 1$, si la parte negativa es finita:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0;$$

- ❸ una **singularidad esencial**, si la parte negativa posee infinitos términos no nulos.

Un polo de orden 1 es **simple**, uno de orden 2 es **doble**, etc. Así, en $z_0 = 0$, la función $\frac{1 - \cos(z)}{z^2}$ posee una singularidad removible, $\frac{e^z}{z^3}$ y $\frac{1}{z^2 \sin(z)}$ un polo de orden 3, y $e^{1/z}$ una singularidad esencial.

Singularidades removibles

Si z_0 es removible, entonces $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ en $0 < |z - z_0| < r$, y definiendo $f(z_0) := a_0$ se obtiene una función holomorfa en todo el disco $D(z_0, r)$.

z_0 es una singularidad removible de f si y sólo si existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$, y en tal caso ese límite es a_0 .

Ejemplo: $\frac{\sin(z)}{z} \rightarrow 1$ y $\frac{z}{e^z - 1} \rightarrow 1$ cuando $z \rightarrow 0$, luego ambas funciones poseen una singularidad removible en el origen (se extienden con el valor 1).

Si z_0 es un polo de orden m , factorizando $(z - z_0)^{-m}$ en la serie de Laurent,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + a_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots,$$

con g holomorfa en $D(z_0, r)$ y $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$. En particular $|f(z)| \rightarrow +\infty$ cuando $z \rightarrow z_0$.

z_0 es un polo de orden m de f si y sólo si existe $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ y es no nulo.

Ejemplo: $z^3 \cdot \frac{e^z}{z^3} = e^z \rightarrow 1$ y $z^3 \cdot \frac{1}{z^2 \sin(z)} = \frac{z}{\sin(z)} \rightarrow 1$ cuando $z \rightarrow 0$, luego ambas funciones poseen un polo de orden 3 en el origen.

Singularidades esenciales

En una singularidad esencial no existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, ni finito ni infinito. Para $e^{1/z}$ en $z_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0, \quad \left| e^{1/(iy)} \right| = 1 \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^*.$$

Cultura general

Cerca de una singularidad esencial, f toma valores arbitrariamente cercanos a cualquier número complejo (**Teorema de Casorati–Weierstrass**), y más aún toma todos los valores salvo a lo más uno (**Teorema de Picard**).

Por ejemplo, si $w \in \mathbb{C}^*$ las soluciones de $e^{1/z} = w$ son $z_k = (\ln |w| + i \arg(w) + 2k\pi i)^{-1}$ con $k \in \mathbb{Z}$ (ver Clase 10), y $z_k \rightarrow 0$ cuando $|k| \rightarrow +\infty$. Así, $e^{1/z}$ toma todo valor de $\mathbb{C}^*$ en cada anillo $0 < |z| < \varepsilon$.

Polos de un cociente

En la práctica $f = \frac{u}{v}$ con u, v holomorfas cerca de z_0 y $v(z_0) = 0$. Si u posee un cero de orden k en z_0 ($k = 0$ si $u(z_0) \neq 0$) y v uno de orden $m \geq 1$, escribiendo $u = (z - z_0)^k \tilde{u}$ y $v = (z - z_0)^m \tilde{v}$ con $\tilde{u}(z_0) \neq 0$ y $\tilde{v}(z_0) \neq 0$ (ver Clase 12) se tiene $\frac{u}{v} = (z - z_0)^{k-m} \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}$, es decir:

$\frac{u}{v}$ posee un **polo de orden** $m - k$ en z_0 si $k < m$, y una **singularidad removable** si $k \geq m$.

- 1 $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ posee polos simples en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ (allí $\cos$ posee ceros simples y $\sin$ no se anula).
- 2 $\frac{1}{e^z - 1}$ posee polos simples en $2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- 3 $\frac{\sin(z)}{z^4}$ posee un polo de orden 3 en el origen, y $\frac{1 - \cos(z)}{z^2}$ una singularidad removable.

- 1 Desarrollar $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ en serie de Laurent en los anillos $1 < |z| < 3$ y $|z| > 3$.
- 2 Desarrollar $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ en serie de Laurent en el anillo $0 < |z-1| < +\infty$.
- 3 Calcular los tres primeros términos no nulos de la serie de Laurent de $\cot(z)$ en $0 < |z| < \pi$.
- 4 Clasificar las singularidades aisladas de $\frac{z}{\sin(z)}$, de $\frac{e^z-1-z}{z^3}$ y de $z^2 e^{1/z}$, indicando el orden de cada polo.

Hoy

- Una función holomorfa en un anillo $A(z_0; R_1, R_2)$ admite una única serie de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$, suma de una parte positiva y una parte negativa.
- En la práctica la serie se obtiene con la serie geométrica, por sustitución en series conocidas o como cociente de series, y depende del anillo.
- Una singularidad aislada es removible, un polo de orden m o esencial, según su parte negativa sea nula, finita o infinita.
- Para $\frac{u}{v}$, el orden del polo es la diferencia entre los órdenes de los ceros de v y de u .

Próxima clase

Residuos y Teorema de los residuos.

Gracias por su atención