

# Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 14

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María  
Valparaíso, Chile

23 de septiembre de 2026

## §36. El Teorema de Cauchy

# Cuándo existe una primitiva

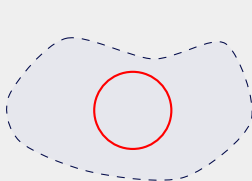
Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto conexo y  $f$  continua en  $\Omega$ . Entonces  $f$  posee primitiva en  $\Omega$  si y sólo si  $\int_{\gamma} f dz = 0$  para todo camino cerrado  $\gamma \subseteq \Omega$ .

**Idea de la prueba:** se fija  $z_* \in \Omega$  y se define  $F(z) := \int_{\gamma_z} f$  sobre cualquier camino  $\gamma_z$  de  $z_*$  a  $z$ , que por hipótesis no depende del camino elegido. Se verifica entonces  $F' = f$ .  $\square$

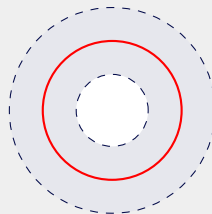
Sobre un disco ya lo discutimos: toda serie de potencias posee primitiva en su disco de convergencia (ver Clase 12).

# Regiones simplemente conexas

Un abierto conexo  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  es **simplemente conexo** si todo camino cerrado contenido en  $\Omega$  se puede deformar de manera continua, dentro de  $\Omega$ , hasta un punto. En la práctica:  $\Omega$  no posee “agujeros”.



simplemente conexo



anillo

Son simplemente conexos  $\mathbb{C}$ , todo disco  $D(z_0, r)$ , el semiplano superior y cada  $\Omega_{\theta_0}$  (ver Clase 10). No lo son  $\mathbb{C}^*$  ni el anillo  $A(z_0; r_1, r_2)$ : la curva roja de la derecha no se puede contraer sin cruzar el agujero.

# El Teorema de Cauchy

## Teorema (Cauchy–Goursat)

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto simplemente conexo y sea  $f$  holomorfa en  $\Omega$ . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{para todo camino cerrado } \gamma \subseteq \Omega.$$

Luego, hay dos consecuencias inmediatas:

- 1 La integral de  $f$  entre dos puntos de  $\Omega$  **no depende del camino**.
- 2  $f$  **posee primitiva** en  $\Omega$ .

**Ejemplo:** sobre cualquier camino contenido en  $\Omega_{\theta_0}$  que va de  $z_0$  a  $z_1$ , se tiene  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \log_{\theta_0}(z_1) - \log_{\theta_0}(z_0)$ .

Supongamos además  $f'$  continua, y sea  $\gamma$  un camino cerrado simple, anti-horario, que encierra la región  $D \subseteq \Omega$ . Por la Clase 13,

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy),$$

y el Teorema de Green transforma cada término en una integral doble:

$$\int_{\gamma} (u dx - v dy) = \iint_D (-v_x - u_y) dA, \quad \int_{\gamma} (v dx + u dy) = \iint_D (u_x - v_y) dA.$$

Los dos integrandos son nulos (¡Ecuaciones de Cauchy–Riemann!). □

**Observación:** Goursat probó el teorema sin suponer  $f'$  continua. Esa demostración no se verá en el curso.

# La hipótesis sobre $\Omega$

La función  $f(z) = \frac{1}{z}$  es holomorfa en  $\mathbb{C}^*$ , y sin embargo (ver Clase 13)

$$\int_{\Gamma(0,1)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

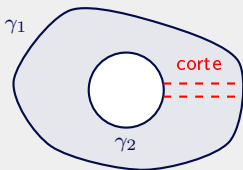
Intuitivamente:  $\mathbb{C}^*$  no es simplemente conexo, y el valor  $2\pi i$  proviene del agujero de  $\Omega$ , no de la función.

El mismo valor se obtiene sobre  $\Gamma(0,r)$  para todo  $r > 0$ , y veremos a continuación que también sobre cualquier camino cerrado simple antihorario que encierre el origen.

## §37. Deformación de contornos

# Deformación de contornos

Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  caminos cerrados simples antihorarios, con  $\gamma_2$  contenido en el interior de  $\gamma_1$ , y sea  $f$  holomorfa en la región comprendida entre ambos.



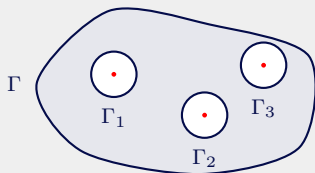
$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

**Idea de la prueba:** se unen  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  por un corte. El camino cerrado que resulta encierra una región simplemente conexa donde  $f$  es holomorfa, luego su integral se anula, y las dos contribuciones del corte se cancelan por recorrerse en **sentidos opuestos**. □

# Varios agujeros

Sea  $\Gamma$  un camino cerrado simple antihorario y sean  $a_1, \dots, a_k$  los puntos de su interior donde  $f$  deja de ser holomorfa. Tomando círculos disjuntos  $\Gamma_j := \Gamma(a_j, \varepsilon)$  contenidos en el interior de  $\Gamma$ :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} f(z) dz.$$



## Un ejemplo con dos polos

Sea  $\Gamma$  un camino cerrado simple antihorario y  $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ . Por fracciones parciales,

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right).$$

Si  $\Gamma$  encierra 1 y  $-1$ , se deforma a dos círculos pequeños. Sobre el círculo en torno a 1, el término  $\frac{1}{z+1}$  es holomorfo en el disco que encierra y su integral se anula, mientras que el otro entrega  $2\pi i$ . Del mismo modo en torno a  $-1$ , de donde

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}(2\pi i) - \frac{1}{2}(2\pi i) = 0.$$

Si  $\Gamma$  encierra únicamente a  $z = 1$ , queda  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i$ .

# Funciones racionales

Toda función racional se descompone en fracciones parciales

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \sum_j \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{j,k}}{(z - a_j)^k}, \quad S \text{ polinomio.}$$

Sobre un camino cerrado,  $S$  y los términos con  $k \geq 2$  poseen primitiva y por ende no aportan nada. Sólo sobreviven los términos con  $k = 1$ :

$$\int_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{a_j \text{ encerrado por } \Gamma} c_{j,1}.$$

Más adelante veremos que esta misma cuenta vale para funciones mucho más generales que las racionales.

## §38. La fórmula integral de Cauchy

# La fórmula integral de Cauchy

## Teorema

Sea  $\Omega$  abierto simplemente conexo,  $f$  holomorfa en  $\Omega$ ,  $\Gamma \subseteq \Omega$  un camino cerrado simple antihorario y  $z_0$  un punto del interior de  $\Gamma$ . Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Es decir, los valores de  $f$  en el interior de  $\Gamma$  quedan determinados por los valores sobre  $\Gamma$ .

**Idea de la prueba:** la función  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  es holomorfa salvo en  $z_0$ , luego  $\Gamma$  se deforma al círculo  $\Gamma(z_0, \varepsilon)$ . Escribiendo  $f(z) = f(z_0) + (f(z) - f(z_0))$ , el primer término entrega  $f(z_0) \cdot 2\pi i$  y el segundo se acota con ML por  $\frac{\delta}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon = 2\pi\delta$ , donde  $\delta$  es una cota de  $|f(z) - f(z_0)|$  sobre el círculo. Por continuidad de  $f$  en  $z_0$  se tiene  $\delta \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

# La fórmula para las derivadas

Derivando bajo el signo integral respecto de  $z_0$  se obtiene, en las mismas hipótesis,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Toda función holomorfa posee entonces derivadas de todo orden, y en particular es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .

Desarrollando  $\frac{1}{z-z_0}$  con la serie geométrica dentro de un disco  $D(z_0, \rho)$  contenido en  $\Omega$  se obtiene además que **toda función holomorfa es analítica**, con radio al menos  $\text{dist}(z_0, \partial\Omega)$  (ver Clase 12).

# Ejemplos de cálculo

❶  $\int_{\Gamma(0,2)} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i e^1$  (aquí  $f(z) = e^z$  y  $z_0 = 1$ ).

❷  $\int_{\Gamma(0,1)} \frac{\cos(z)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \cos''(0) = -\pi i$

(aquí  $f(z) = \cos(z)$ ,  $z_0 = 0$ ,  $n = 2$ ).

❸  $\int_{\Gamma(0,3)} \frac{dz}{z^2+1}$ : los dos puntos  $\pm i$  quedan encerrados, y

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) \implies \int_{\Gamma(0,3)} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{2\pi i - 2\pi i}{2i} = 0.$$

**Ejercicio** Calcular  $\int_{\Gamma(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z-1)^2} dz$  y  $\int_{\Gamma(2,1)} \frac{dz}{z^2+1}$ .

# Valor medio y módulo máximo

Tomando  $\Gamma = \Gamma(z_0, r)$  en la fórmula, con  $z = z_0 + re^{it}$  y  $dz = ire^{it}dt$ :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

conocida como la **propiedad del valor medio** (comparar con la Clase 8).

De ahí se obtiene el **principio del módulo máximo**: si  $|f|$  posee un máximo local en un abierto conexo  $\Omega$ , entonces  $f$  es constante en  $\Omega$ .

En particular, si  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  acotado y continua en  $\overline{\Omega}$ , el máximo de  $|f|$  sobre  $\overline{\Omega}$  se alcanza en el borde  $\partial\Omega$ .

- ❶ **Desigualdades de Cauchy.** Si  $|f| \leq M$  sobre  $\Gamma(z_0, r)$ , la cota ML aplicada a la fórmula de las derivadas entrega

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! M}{r^n}.$$

- ❷ **Teorema de Liouville.** Toda función entera y acotada es constante. En efecto, con  $n = 1$  la desigualdad anterior da  $|f'(z_0)| \leq M/r$  para todo  $r > 0$ , luego  $f' \equiv 0$ .
- ❸ **Teorema Fundamental del Álgebra.** Si  $P$  es un polinomio de grado  $\geq 1$  sin raíces, entonces  $1/P$  es entera y acotada, luego constante. Así, todo polinomio de grado  $\geq 1$  posee una raíz en  $\mathbb{C}$ .

- 1 Calcular  $\int_{\Gamma(0,2)} \frac{z dz}{(z-1)(z+3)}$  y  $\int_{\Gamma(0,4)} \frac{z dz}{(z-1)(z+3)}$ .
- 2 Calcular  $\int_{\Gamma(0,1)} \frac{e^{2z}}{z^4} dz$  y  $\int_{\Gamma(0,1)} \frac{dz}{z(z-2)}$ .
- 3 Sea  $\Gamma$  el borde del cuadrado de vértices  $\pm 2 \pm 2i$ , recorrido en sentido antihorario. Calcular  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+1}$ .
- 4 Determinar  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$  cuando  $\Gamma$  es un camino cerrado simple antihorario que no encierra el origen, y cuando sí lo encierra.

## Hoy

- En un abierto simplemente conexo la integral de una función holomorfa sobre todo camino cerrado se anula, y  $f$  posee primitiva. En  $\mathbb{C}^*$  eso falla, con  $\int_{\Gamma(0,1)} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ .
- Un contorno se deforma libremente mientras no cruce un punto donde  $f$  deja de ser holomorfa, y la integral se reparte en un círculo pequeño por cada uno de esos puntos.
- $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$  y su versión para  $f^{(n)}$  recuperan  $f$  y todas sus derivadas desde el borde, y toda función holomorfa es analítica.
- La propiedad del valor medio implica el principio del módulo máximo.

## Próxima clase

Series de Laurent y singularidades aisladas.

Gracias por su atención