

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 13

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

21 de septiembre de 2026

§33. La integral de línea

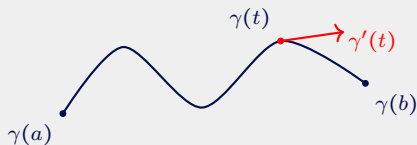
Recuerdo

- $f = u + iv$ es **holomorfa** en Ω si y sólo si $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ verifican $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, y en tal caso $f' = u_x + iv_x$.
- Una serie de potencias de radio $R > 0$ es holomorfa en $D(z_0, R)$, se deriva término a término y **admite primitiva** en ese disco.
- Toda función holomorfa es analítica (aún por demostrar).

La integral a lo largo de un camino, que definimos a continuación, es la herramienta que prueba el último punto.

Caminos en el plano

Un **camino** es una función continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos. Es **cerrado** si $\gamma(a) = \gamma(b)$, y **simple** si no se corta a sí mismo. Su **longitud** es $\ell(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.



El segmento de z_0 a z_1 se parametriza por $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$ con $t \in [0, 1]$, y el círculo $\Gamma(z_0, r)$ por $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ (sentido antihorario), de longitud $2\pi r$.

La integral de línea

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino y f continua sobre su traza.

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

El lado derecho es la integral de una función de $[a, b]$ en $\mathbb{C}$, continua por pedazos, y formalmente se calcula separando parte real e imaginaria:

$$\int_a^b (\varphi + i\psi) = \int_a^b \varphi + i \int_a^b \psi.$$

Ejemplo: sobre $\Gamma(0, 1)$, con $\gamma(t) = e^{it}$ y $\gamma'(t) = ie^{it}$,

$$\int_{\Gamma(0,1)} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

- ❶ **Linealidad:** $\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- ❷ **Aditividad:** si γ se recorre concatenando γ_1 y γ_2 , entonces $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$.
- ❸ **Orientación:** si $-\gamma$ es el camino recorrido al revés, $\gamma^-(t) := \gamma(a + b - t)$, entonces $\int_{-\gamma} f dz = - \int_{\gamma} f dz$.
- ❹ **Reparametrización:** el valor no cambia al reparametrizar el camino (cambio de variable) manteniendo la orientación.

La integral depende del camino, y no sólo de sus extremos.

Dos caminos entre los mismos extremos

Sean γ_1 el segmento de 0 a $1+i$, y γ_2 el camino que va de 0 a 1 y luego de 1 a $1+i$.

Para $f(z) = z$: con $\gamma_1(t) = t(1+i)$ queda $\int_{\gamma_1} z dz = (1+i)^2 \int_0^1 t dt = i$, y sumando los dos tramos de γ_2 ,

$$\int_{\gamma_2} z dz = \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1+it) i dt = \frac{1}{2} + \left(i - \frac{1}{2}\right) = i.$$

Para $f(z) = \bar{z}$, el mismo cálculo entrega

$$\int_{\gamma_1} \bar{z} dz = |1+i|^2 \int_0^1 t dt = 1, \quad \int_{\gamma_2} \bar{z} dz = \frac{1}{2} + \left(i + \frac{1}{2}\right) = 1+i.$$

Los dos caminos dan el mismo valor para z y valores distintos para $\bar{z}$.

Ejemplo fundamental

Sean $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y $n \in \mathbb{Z}$. Con $\gamma(t) = a + re^{it}$ se tiene $\gamma'(t) = ire^{it}$ y $(\gamma(t) - a)^n = r^n e^{int}$, luego

$$\int_{\Gamma(a,r)} (z - a)^n dz = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Para $n \neq -1$ la última integral vale $\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0$, y para $n = -1$ el integrando es constante igual a 1.

$$\int_{\Gamma(a,r)} (z - a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

El valor **no depende** del radio r .

Las dos integrales de línea reales

Con $f = u + iv$ y $dz = dx + i dy$ se tiene $f dz = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$, de donde

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy).$$

Es decir, una integral compleja son dos integrales de línea de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$: las de $(u, -v)$ y de (v, u) , que son las integrales de línea del cálculo vectorial.

Ejercicio Escribir $\int_{\Gamma(0,1)} \bar{z} dz$ como dos integrales de línea reales y recuperar el valor $2\pi i$.

§34. La cota ML

Sea f continua sobre la curva γ y sea $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ allí. Entonces

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \ell(\gamma).$$

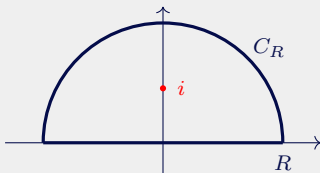
Prueba: $\left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$ $\square$

Ejemplo: sobre $\Gamma(0, r)$ se tiene $\left| \frac{e^z}{z} \right| = \frac{e^{\operatorname{Re}(z)}}{r} \leq \frac{e^r}{r}$, luego

$$\left| \int_{\Gamma(0, r)} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq \frac{e^r}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi e^r.$$

Acotamiento sobre un arco de radio $R \rightarrow +\infty$

Sea C_R el semicírculo superior de radio R centrado en el origen, recorrido en sentido antihorario, y sea $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$.



Para $|z| = R > 1$, la desigualdad triangular¹ da $|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1$, luego $|f(z)| \leq \frac{1}{R^2-1}$. Con $\ell(C_R) = \pi R$,

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Del mismo modo, si $f = P(z)/Q(z)$ con P, Q polinomios tales que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$, la integral sobre C_R tiende a 0.

¹Recordar que $|a| + |b| \geq |a + b| \geq ||a| - |b||$.

Acotamiento sobre un arco de radio $\varepsilon \rightarrow 0^+$

Sea ahora γ_ε el semicírculo superior de radio ε centrado en el origen. Con la rama principal de $z^{1/2}$ se tiene $|z^{-1/2}| = \varepsilon^{-1/2}$ sobre γ_ε , y $\ell(\gamma_\varepsilon) = \pi\varepsilon$, luego

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{\sqrt{z}} \right| \leq \pi\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1/2} = \pi\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

En general, si $zf(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $\int_{\gamma_\varepsilon} f dz \rightarrow 0$ sobre los arcos de radio ε centrados en z_0 .

Ejercicio Acotar $\left| \int_{C_R} \frac{z dz}{z^3 + 1} \right|$ para $R > 1$ y verificar que tiende a 0.

§35. Primitivas

El teorema fundamental

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Una **primitiva** de f en Ω es una función holomorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $F' = f$.

Si F es primitiva de f en Ω y $\gamma \subseteq \Omega$ es un camino de z_0 a z_1 , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0).$$

En particular la integral **no depende del camino** y se anula sobre todo **camino cerrado**.

Prueba: $\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$, y se aplica el teorema fundamental del cálculo en $[a, b]$. □

Sea γ un camino de z_0 a z_1 . Las primitivas de la Clase 12 dan

$$\int_{\gamma} z^n dz = \frac{z_1^{n+1} - z_0^{n+1}}{n+1} \quad (n \geq 0), \quad \int_{\gamma} e^z dz = e^{z_1} - e^{z_0},$$

$$\int_{\gamma} \cos(z) dz = \sin(z_1) - \sin(z_0), \quad \int_{\gamma} \sinh(z) dz = \cosh(z_1) - \cosh(z_0),$$

y todas se anulan cuando γ es cerrado.

Ejemplo: el cálculo de $\int_{\gamma} z dz = \frac{(1+i)^2}{2} = i$ vale para cualquier camino de 0 a $1+i$, lo que explica los dos valores iguales obtenidos antes.

Relectura del ejemplo fundamental

Para $n \neq -1$, la función $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ es primitiva de $(z-a)^n$ en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, y por eso la integral sobre $\Gamma(a, r)$ es 0.

Para $n = -1$ la integral vale $2\pi i \neq 0$ sobre un camino cerrado.

La función $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ **no posee primitiva** en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$: ninguna rama del logaritmo está definida en todo el plano sin un punto (ver Clase 10).

Del mismo modo, $\bar{z}$ no posee primitiva en ningún abierto, dado que los dos caminos de 0 a $1+i$ entregaron valores distintos.

Cuándo existe una primitiva

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo y f continua en Ω . Entonces f posee primitiva en Ω si y sólo si $\int_{\gamma} f dz = 0$ para todo camino cerrado $\gamma \subseteq \Omega$.

Idea de la prueba: se fija $z_* \in \Omega$ y se define $F(z) := \int_{\gamma_z} f$ sobre cualquier camino γ_z de z_* a z , que por hipótesis no depende del camino elegido. Se verifica entonces $F' = f$. $\square$

Sobre un disco se vió la clase pasada: toda serie de potencias posee primitiva en su disco de convergencia (ver Clase 12). Más adelante veremos que toda función holomorfa posee primitiva en cualquier abierto sin “agujeros”.

- 1 Calcular $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz$ sobre el segmento de 0 a $1+i$ y sobre el camino que va de 0 a 1 y luego de 1 a $1+i$. Comparar los valores.
- 2 Calcular $\int_{\Gamma(0,1)} |z| dz$ y $\int_{\Gamma(0,1)} \frac{dz}{z^2}$ directamente por la definición.
- 3 Acotar $\left| \int_{C_R} \frac{z^2 dz}{z^4+1} \right|$, con C_R el semicírculo superior de radio $R > 1$, y determinar el límite cuando $R \rightarrow +\infty$.
- 4 Determinar si $f(z) = \frac{1}{z^2}$ posee primitiva en $\mathbb{C}^*$ y si $g(z) = \frac{1}{z}$ posee primitiva en el semiplano $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Hoy

- La integral $\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$ cambia de signo al invertir la orientación y equivale a dos integrales de línea reales.
- $\int_{\Gamma(a,r)} (z-a)^n dz$ vale 0 salvo para $n = -1$, donde vale $2\pi i$ y no depende de r .
- La cota $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M\ell(\gamma)$ permite, por ejemplo, decidir el comportamiento de las integrales sobre arcos de círculo.
- Si f posee primitiva, la integral sólo depende de los extremos y se anula sobre caminos cerrados; $\frac{1}{z-a}$ no posee primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Próxima clase

Teorema de Cauchy y Fórmula Integral de Cauchy.

Gracias por su atención