

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 12

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

9 de septiembre de 2026

§30. Series de potencias

Sea $\{a_n\}_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$. La serie $\sum_{n \geq 0} a_n$ **converge** si la sucesión de sumas parciales $s_N := \sum_{n=0}^N a_n$ converge¹ en $\mathbb{C}$, y en tal caso $\sum_{n \geq 0} a_n := \lim_{N \rightarrow +\infty} s_N$.

Si $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge. Decimos que la serie **converge absolutamente**.

En el caso anterior, la convergencia entonces decidida por series reales de términos positivos, a las que se aplican los criterios de comparación, de la razón y de la raíz n -ésima. Si a_n no tiende a 0, la serie diverge.

Ejercicio Sea $a_n = u_n + iv_n$ con $u_n, v_n \in \mathbb{R}$. Probar que $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum u_n$ y $\sum v_n$ convergen.

¹Decimos que $\{z_n\}_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ converge a $\ell \in \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $|z_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq M$.

La serie geométrica

Para $z \neq 1$ se tiene $s_N = 1 + z + \cdots + z^N = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$. Si $|z| < 1$ entonces $z^{N+1} \rightarrow 0$, luego

$$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{para todo } |z| < 1.$$

Si $|z| \geq 1$ el término general no tiende a 0 y la serie diverge. Del mismo modo, para todo $a \in \mathbb{C}^*$,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{a^n} = \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = \frac{a}{a-z} \quad \text{para todo } |z| < |a|.$$

Series de potencias

Una **serie de potencias** centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, con $a_n \in \mathbb{C}$.

Existe un único $R \in [0, +\infty]$, el **radio de convergencia**, tal que la serie converge absolutamente para $|z - z_0| < R$ y diverge para $|z - z_0| > R$.

El disco $D(z_0, R)$ es el **disco de convergencia**. Sobre el círculo $\Gamma(z_0, R)$ no se afirma nada, es decir, cada punto del borde se estudia aparte. El radio se calcula con

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{o bien} \quad R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

cuando este último límite existe, donde $1/0 := +\infty$ y $1/+\infty := 0$.

Cálculo del radio

- $\sum_{n \geq 0} z^n$: $R = 1$, con disco de convergencia $\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.
- $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$: $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = n + 1$, luego $R = +\infty$.
- $\sum_{n \geq 1} n^n z^n$: $\sqrt[n]{|a_n|} = n$, luego $R = 0$ (la serie converge sólo en $z = 0$).
- $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ poseen ambas $R = 1$.

Como $\sqrt[n]{n^\alpha} \rightarrow 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, las series $\sum a_n z^n$ y $\sum n^\alpha a_n z^n$ tienen el mismo radio. En el borde el comportamiento sí cambia: $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge en todo $\Gamma(0, 1)$, mientras que $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge en $z = 1$ y converge en $z = -1$.

Ejercicio Calcular el radio de convergencia de $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^n + 3^n}$ y de $\sum_{n \geq 0} 2^n z^{2n}$.

Derivación término a término

Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ con radio $R > 0$. Entonces f es holomorfa en $D(z_0, R)$ y

$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

serie que posee el mismo radio R .

Iterando, f posee derivadas de todo orden en $D(z_0, R)$ y, evaluando en z_0 ,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

En particular los coeficientes quedan determinados por f .

Del mismo modo, $F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$ posee radio R y verifica $F' = f$: toda serie de potencias admite primitiva en su disco de convergencia.

§31. Series de Taylor

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Decimos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es **analítica** si para todo $z_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad \text{para todo } |z - z_0| < r.$$

Por lo anterior toda función analítica es holomorfa, y $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, es decir, esa serie es la **serie de Taylor** de f en z_0 .

Más adelante veremos el recíproco: **toda función holomorfa en Ω es analítica**, y el radio de su serie de Taylor en z_0 es al menos $\text{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

El enunciado análogo en variable real es falso. La función $g(x) = e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ y verifica $g^{(n)}(0) = 0$ para todo n , luego su serie de Taylor en el origen es la **serie nula** ($\neq g$).

Las series más comunes

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n & (\mathbf{R} = 1) \\ \sin(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} & (\mathbf{R} = +\infty) \\ \sinh(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} & (\mathbf{R} = +\infty) \\ \operatorname{Ln}(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n & (\mathbf{R} = 1) \end{array} \quad \begin{array}{ll} e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} & (\mathbf{R} = +\infty) \\ \cos(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} & (\mathbf{R} = +\infty) \\ \cosh(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} & (\mathbf{R} = +\infty) \\ (1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n & (\mathbf{R} = 1) \end{array}$$

Aquí $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, y tanto en $\operatorname{Ln}(1+z)$ como en $(1+z)^\alpha$ se usa la rama principal ($\theta_0 = 0$, i.e., $\operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi[$).

Desarrollo en torno a otro punto

Para desarrollar en torno a $z_0 \neq 0$, la idea es escribir la serie en potencias de $z - z_0$ (y usar, por ejemplo, la geométrica si fuera necesario).

Para $f(z) = 1/z$ y $z_0 = 2$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + (z - 2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{z-2}{2} \right)^n,$$

válido cuando $\left| \frac{z-2}{2} \right| < 1$. Luego

$$\frac{1}{z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z - 2)^n \quad \text{para todo } |z - 2| < 2.$$

El radio es $2 = |2 - 0|$, la distancia de $z_0 = 2$ al único punto donde $1/z$ no está definida.

Sustitución y producto

Reemplazar z por $w(z)$ (cambio de variable) en un desarrollo en serie vale mientras $w(z)$ quede dentro del disco de convergencia:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1), \quad e^{-z^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

El **producto de Cauchy** de dos series de potencias es

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n, \quad c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p},$$

con radio al menos el menor de los dos. Por ejemplo,

$$\frac{e^z}{1-z} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right) z^n \quad \text{para todo } |z| < 1.$$

Derivación e integración de series

Derivando la geométrica se obtiene, para $|z| < 1$,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n \geq 1} n z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n, \quad \text{y luego} \quad \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n \geq 1} n z^n.$$

Integrando $\frac{1}{1+z} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n$ término a término, y usando que $\text{Ln}(1) = 0$,

$$\text{Ln}(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad \text{para todo } |z| < 1.$$

Ejercicio Deducir el desarrollo de $\frac{1}{(1-z)^3}$ en torno al origen.

El cociente de dos series

Si $g(z_0) \neq 0$, el cociente f/g admite desarrollo en torno a z_0 y sus coeficientes se obtienen escribiendo $f = g \cdot (\sum c_n(z - z_0)^n)$ e igualando coeficientes.

Para $\tan(z) = \sin(z)/\cos(z)$ en torno a $z_0 = 0$, que es impar, se escribe $\tan(z) = c_1z + c_3z^3 + c_5z^5 + \dots$ y

$$z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots = \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots\right)(c_1z + c_3z^3 + c_5z^5 + \dots),$$

de donde $c_1 = 1$, luego $c_3 - \frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6}$ y así $c_3 = \frac{1}{3}$, y del mismo modo $c_5 = \frac{2}{15}$:

$$\tan(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots \quad \text{para todo } |z| < \frac{\pi}{2}.$$

§32. Ceros y radio de convergencia

Orden de un cero

Sea f analítica en Ω , sea $z_0 \in \Omega$ con $f(z_0) = 0$ y supongamos que f no es idénticamente nula cerca de z_0 . Existe entonces un único $m \geq 1$ tal que

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g \text{ analítica y } g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0.$$

Decimos que f posee un **cero de orden** m en z_0 ; si $m = 1$ el cero es **simple**, si $m = 2$ el cero es **doble**, etc.

Por ejemplo, $\sin(z)$ posee ceros simples en $z = k\pi$, y $1 - \cos(z)$ posee un cero de orden 2 en el origen.

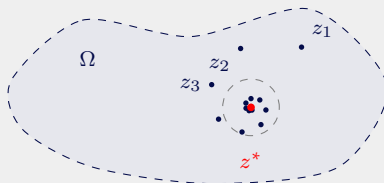
Ejercicio Determinar el orden de los ceros de $e^z - 1$ y de $z^2 \sinh(z)$.

Ceros aislados

En la factorización $f = (z - z_0)^m g$ se tiene $g(z_0) \neq 0$ y g continua, luego g no se anula en un disco $D(z_0, \varepsilon)$. Así, f no posee otro cero en ese disco.

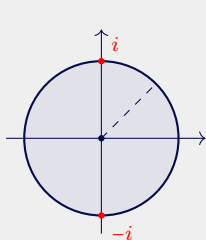
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo y f holomorfa en Ω , no idénticamente nula. Entonces **los ceros de f son puntos aislados**.

En particular, dos funciones holomorfas en Ω conexo que coinciden en un conjunto con un **punto de acumulación** en Ω coinciden en todo Ω .

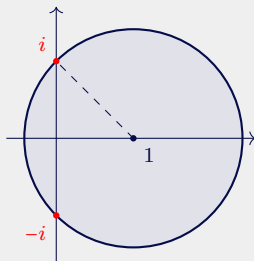


Las identidades reales se extienden entonces al plano: $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ vale en $\mathbb{C}$ porque ambos lados son enteros y coinciden en $\mathbb{R}$.

El radio y la singularidad más cercana



$$z_0 = 0, R = 1$$



$$z_0 = 1, R = \sqrt{2}$$

La función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Su serie de Taylor en $z_0 = 0$ posee radio 1, y la centrada en $z_0 = 1$, radio $|1 - i| = \sqrt{2}$: en ambos casos, la distancia de z_0 a la singularidad más cercana.

La serie real de $1/(1+x^2)$

En la recta real, la función $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$, es acotada y no se anula, y su serie de Taylor en el origen es

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Nada en $\mathbb{R}$ indica por qué esta serie deja de converger en $|x| = 1$. La razón aparece al mirar la función en $\mathbb{C}$: los puntos $\pm i$, donde el denominador se anula, están a distancia 1 del origen, y ése es el radio.

Ejercicio Determinar, sin calcular los coeficientes, el radio de la serie de Taylor de $\frac{1}{z^2-3z+2}$ en torno a $z_0 = 0$ y en torno a $z_0 = -1$.

Ejercicios

- 1 Calcular el radio de convergencia de $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$, de $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ y de $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$.
- 2 Desarrollar $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ en serie de potencias en torno a $z_0 = 0$ usando fracciones parciales, e indicar el radio de convergencia.
- 3 Calcular los cuatro primeros términos no nulos del desarrollo de $\frac{z}{e^z - 1}$ en torno al origen.
- 4 Determinar el orden del cero en $z_0 = 0$ de $\sin(z) - z \cos(z)$ y de $\cosh(z) - 1$.

Hoy

- Una serie de potencias converge absolutamente en $D(z_0, R)$ y diverge fuera; el radio se calcula por la razón o por la raíz, y en el borde no se afirma nada.
- La suma es holomorfa en su disco, se deriva e integra término a término, y sus coeficientes son $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.
- Los desarrollos usuales, junto con la geométrica, la sustitución, el producto y la división, entregan el desarrollo de las funciones del curso.
- Un cero de orden m se factoriza como $(z - z_0)^m g$ con $g(z_0) \neq 0$; los ceros son aislados y el radio es la distancia a la singularidad más cercana.

Próxima clase

Integración en el plano complejo.

Gracias por su atención