

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 11

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

7 de septiembre de 2026

§26. La derivada compleja

Recuerdo

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que f es **derivable** en $z_0 \in \Omega$ si existe el límite

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{C}^*.$$

Si f es derivable en todo punto de Ω , decimos que es **holomorfa** en Ω ; si además $\Omega = \mathbb{C}$, decimos que f es **entera**.

La definición es formalmente idéntica a la del cálculo real. La diferencia está en que ahora $h \in \mathbb{C}$, de modo que h puede tender a 0 **por cualquier dirección del plano** y el cociente debe tender siempre al mismo número.

Un ejemplo y dos contraejemplos

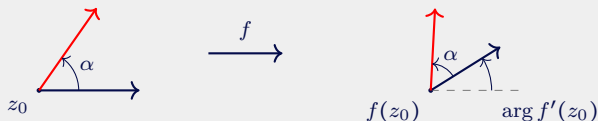
- ❶ $f(z) = z^2$. El cociente es $\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = 2z + h \rightarrow 2z$, sin importar cómo tienda h a 0. Luego f es entera y $f'(z) = 2z$.
- ❷ $f(z) = \bar{z}$. El cociente es $\frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$, que vale 1 si h es real y -1 si h es imaginario puro. El límite no existe en **ningún** punto.
- ❸ $f(z) = |z|^2$. El cociente es

$$\frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h} = \bar{z} + z \frac{\bar{h}}{h} + \bar{h},$$

y por (2) el término del medio sólo posee límite si $z = 0$. Luego f es derivable únicamente en $z_0 = 0$, con $f'(0) = 0$, y no es holomorfa en ningún abierto.

Rotación y homotecia

Si $f'(z_0)$ existe, entonces $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|)$. Como multiplicar por $f'(z_0)$ es rotar en $\arg(f'(z_0))$ y escalar por $|f'(z_0)|$, cerca de z_0 la función actúa como una **rotación** seguida de una **homotecia**.



Una función real diferenciable actúa cerca de un punto como una matriz 2×2 arbitraria. Aquí la matriz está obligada a ser la de una rotación compuesta con una homotecia, lo que se traduce en **dos ecuaciones** sobre u y v .

Reglas de derivación

La definición de derivada tiene la misma forma que en el caso real, luego valen la linealidad y las reglas del producto, del cociente y de la cadena, con las mismas demostraciones. En particular $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Función

polinomios

$e^z, \sin(z), \cos(z), \sinh(z), \cosh(z)$

$P(z)/Q(z)$

$\tan(z)$

$\log_{\theta_0}(z), z^\alpha$

Holomorfa en

$\mathbb{C}$ (enteras)

$\mathbb{C}$ (enteras)

$\mathbb{C}$ menos los ceros de Q

$\mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$

Ω_{θ_0}

Además, $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\log_{\theta_0}(z))' = 1/z$ y $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$.

Funciones que no son holomorfas

Además de $\bar{z}$ y de $|z|^2 = z\bar{z}$, tampoco son holomorfas

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}, \quad \arg(z).$$

En la práctica: si al escribir f en términos de z y $\bar{z}$ la variable $\bar{z}$ **no desaparece**, entonces f no es holomorfa.

Ejercicio Sea $f(x + iy) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Determinar cuándo f es holomorfa.

Indicación: escribir $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

§27. Ecuaciones de Cauchy–Riemann

Las ecuaciones

Sea $f = u + iv$ derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$. Como el límite no depende de la dirección, lo calculamos por dos de ellas. Con $h = t \in \mathbb{R}$ (dirección horizontal):

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

y con $h = it$, $t \in \mathbb{R}$ (dirección vertical):

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

donde todas las derivadas parciales están evaluadas en z_0 . Igualando partes real e imaginaria se obtienen las **ecuaciones de Cauchy–Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f' = u_x + iv_x.$$

El recíproco

Las ecuaciones son necesarias, pero no suficientes, pues se pueden cumplir en un punto sin que f sea derivable en él. Agregando regularidad sobre u y v se obtiene el recíproco.

Teorema

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f = u + iv$ con $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Entonces f es holomorfa en Ω si y sólo si u y v verifican las ecuaciones de Cauchy–Riemann en Ω .

Idea: la diferencial (real, pensada como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) de f en z_0 es la matriz

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

y pedir $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ es pedir que tenga la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, es decir, que sea la multiplicación por el número complejo $a + ib$. Con u y v de clase $\mathcal{C}^1$ esa aproximación lineal es la derivada, y $f'(z_0) = a + ib$.

Ejemplos

- ❶ $f(z) = z^2$: $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$, de donde $u_x = 2x = v_y$ y $u_y = -2y = -v_x$. Así, f es entera y $f' = 2x + 2iy = 2z$.
- ❷ $f(z) = e^z$: $u = e^x \cos(y)$ y $v = e^x \sin(y)$, y las ecuaciones se verifican en todo punto. Luego f es entera y $f' = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) = e^z$.
- ❸ $f(z) = \bar{z}$: $u = x$ y $v = -y$, con $u_x = 1$ y $v_y = -1$. Las ecuaciones fallan en todo punto.
- ❹ $f(z) = |z|^2$: $u = x^2 + y^2$ y $v = 0$, y las ecuaciones piden $2x = 0$ y $2y = 0$. Se cumplen únicamente en el origen, y por ende f no es holomorfa en ningún abierto.

Ejercicio Verificar las ecuaciones para $f(z) = z^3$ y para $f(z) = \operatorname{Im}(z)$.

Cauchy–Riemann en polares

Cuando el dominio es un disco, un anillo o un sector conviene escribir $z = re^{i\theta}$ y $f = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$. La regla de la cadena transforma las ecuaciones en

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad f'(z) = e^{-i\theta} (u_r + iv_r).$$

Ejemplo: la rama principal del logaritmo es $\text{Ln}(z) = \ln(r) + i\theta$ con $\theta = \text{Arg}(z)$, es decir, $u = \ln(r)$ y $v = \theta$. Entonces

$$u_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = 0 = -\frac{1}{r} u_\theta,$$

es decir, Ln es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$, con $f'(z) = e^{-i\theta} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$.

§28. Funciones armónicas

Las partes de una función holomorfa

Sea $f = u + iv$ holomorfa en Ω , con u, v de clase $\mathcal{C}^2$. Derivando la primera ecuación respecto de x , la segunda respecto de y , y usando el Teorema de Schwarz:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0,$$

y del mismo modo $\Delta v = 0$.

$f = u + iv$ holomorfa $\implies u$ y v son armónicas.

Más adelante veremos que la hipótesis $u, v \in \mathcal{C}^2$ se cumple siempre: toda función holomorfa es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Cada función holomorfa entrega entonces dos soluciones de la ecuación de Laplace (ver Clase 8).

La armónica conjugada

Si u y v son armónicas en Ω y verifican Cauchy–Riemann, decimos que son **armónicas conjugadas**, y en tal caso $f = u + iv$ es holomorfa. En la práctica interesa el problema recíproco: dada u armónica, reconstruir v .

Algoritmo

- 1 Integrar $v_y = u_x$ respecto de y : $v(x, y) = \int u_x(x, y) dy + \varphi(x)$.
- 2 Derivar respecto de x e imponer $v_x = -u_y$. Queda una ecuación para $\varphi'(x)$, en la que la variable y debe desaparecer.
- 3 Integrar φ .

La conjugada queda determinada salvo una constante aditiva, es decir, f queda determinada salvo una constante imaginaria pura. El paso (2) dice en la práctica que si la variable y no desaparece, entonces u no era armónica.

Ejemplo: sea $u(x, y) = e^x \cos(y)$, que es armónica en $\mathbb{R}^2$. Entonces

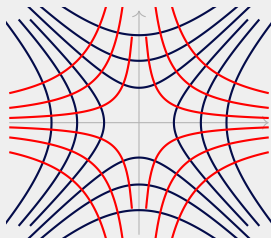
$$v_y = u_x = e^x \cos(y) \implies v(x, y) = e^x \sin(y) + \varphi(x),$$

y como $v_x = e^x \sin(y) + \varphi'(x)$ debe ser igual a $-u_y = e^x \sin(y)$, queda $\varphi' \equiv 0$. Luego $v = e^x \sin(y) + c$ y recuperamos $f(z) = e^z + ic$.

El algoritmo es local. La función $u = \ln|z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ es armónica en $\mathbb{C}^*$ y su conjugada es $\arg(z)$, que no admite determinación continua en todo $\mathbb{C}^*$ (ver Clase 10). Así, u no posee conjugada global en $\mathbb{C}^*$, pero sí en cada Ω_{θ_0} , donde $f = \log_{\theta_0}$.

Curvas de nivel ortogonales

De las ecuaciones se obtiene, en todo punto, $\nabla u \cdot \nabla v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$.



En la figura, las curvas $u = \text{cte}$ (en azul) y $v = \text{cte}$ (en rojo) para $f(z) = z^2$, donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$. En términos físicos, si u es un potencial, las curvas $v = \text{cte}$ son las líneas de campo.

El problema de Dirichlet en el disco

La solución de $\Delta u = 0$ en el disco de radio R (ver Clase 8) era

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{r}{R} \right)^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)].$$

Como $\left(\frac{z}{R} \right)^n = \left(\frac{r}{R} \right)^n e^{in\theta}$, agrupando cada término con $c_n := a_n - ib_n$ queda

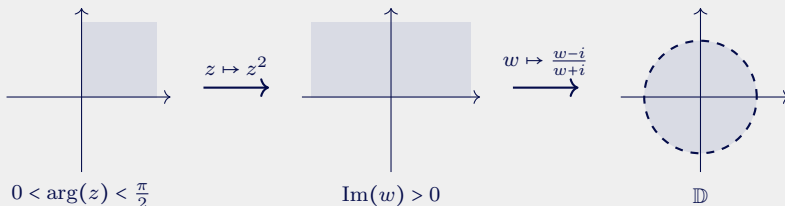
$$u(r, \theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} c_n \left(\frac{z}{R} \right)^n \right).$$

Es decir, la solución de $\Delta u = 0$ del problema de Dirichlet en el disco es la **parte real de una serie de potencias** en z . El factor $(r/R)^n$ es $|z/R|^n$, y es el que hace converger la serie en $|z| < R$.

§29. Transformaciones conformes

Transformaciones conformes

Cultura general: si γ es una curva con $\gamma(0) = z_0$, la curva imagen posee vector tangente $(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0)$. Cuando $f'(z_0) \neq 0$ todas las tangentes en z_0 rotan en $\arg(f'(z_0))$, es decir, f **preserva el ángulo** (i.e., es **conforme**) entre dos curvas que se cortan allí. En los ceros de f' eso falla: $f(z) = z^n$ multiplica por n los ángulos en el origen.



La exponencial juega el mismo rol que z^2 para franjas, y las transformaciones $w = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$ (**de Möbius**) mandan rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

Funciones armónicas a partir de holomorfas

Si u es armónica en Ω' y $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ es holomorfa, entonces $u \circ \varphi$ es armónica en Ω .

Idea de la prueba: localmente $u = \operatorname{Re}(F)$ con F holomorfa, tomando la armónica conjugada. Luego $u \circ \varphi = \operatorname{Re}(F \circ \varphi)$. $\square$

Ejemplo: resolver $\Delta u = 0$ en el cuadrante $\{x > 0, y > 0\}$, con $u = 0$ en el semieje real positivo y $u = 1$ en el semieje imaginario positivo.

En el semiplano superior, el problema análogo con 0 en $\mathbb{R}^{>0}$ y 1 en $\mathbb{R}^{<0}$ posee la solución $\frac{1}{\pi} \operatorname{Arg}(w)$, que es armónica por ser la parte imaginaria de Ln . Componiendo con $\varphi(z) = z^2$, que manda el cuadrante en el semiplano:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg}(z^2) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arg}(z).$$

- 1 Verificar que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, encontrar su armónica conjugada y reconocer la función holomorfa $f = u + iv$ resultante.
- 2 Determinar todos los $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los cuales $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es armónica, y calcular la conjugada en cada caso.
- 3 Usar Cauchy–Riemann en polares para verificar que la rama principal de $z^{1/2}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$, y calcular su derivada.
- 4 Resolver $\Delta u = 0$ en la franja $0 < \operatorname{Im}(z) < \pi$ con $u = 0$ en el borde inferior y $u = 1$ en el superior, transportando el problema con $\varphi(z) = e^z$.

Hoy

- Cerca de un punto, una función holomorfa actúa como una rotación seguida de una homotecia, y una función que depende de $\bar{z}$ no es holomorfa.
- Las ecuaciones $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ deciden la holomorfía mirando sólo u y v ; con u, v de clase $\mathcal{C}^1$ son también suficientes, y $f' = u_x + iv_x$. En polares, $u_r = \frac{1}{r}v_\theta$ y $v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$.
- Las partes real e imaginaria de una función holomorfa son armónicas y sus curvas de nivel se cortan ortogonalmente; la conjugada se reconstruye integrando las ecuaciones.
- Componer con una función holomorfa transporta un problema de Laplace de una región a otra.

Próxima clase

Series de potencias en el plano complejo.

Gracias por su atención