

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 10

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

2 de septiembre de 2026

§24. El plano y las funciones elementales

Tres problemas no cubiertos

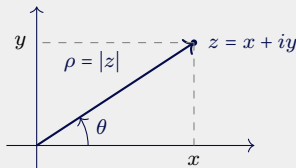
Los siguientes problemas no se resuelven con las técnicas clásicas:

- ➊ Calcular integrales reales que no poseen primitiva elemental, como algunas que aparecen en los coeficientes de Fourier y en los problemas sobre dominios no acotados.
- ➋ Invertir la transformada de Laplace cuando la tabla no basta, por ejemplo si $F(s)$ contiene $\sqrt{s}$ o $\cosh(\sqrt{s})$.
- ➌ Resolver la ecuación de Laplace en regiones donde la separación de variables no se aplica, como un sector circular o una franja.

Los tres se tratan con funciones $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivables en el sentido complejo, es decir, tales que el cociente que define la derivada posee el mismo límite por todas las direcciones del plano.

El plano complejo

Escribimos $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$, y $\bar{z} = x - iy$. Luego $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$. En **forma polar**, $z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho = |z|$ y $\theta = \arg(z)$ definido módulo 2π .



Si $w = \sigma e^{i\varphi}$, entonces $zw = \rho\sigma e^{i(\theta+\varphi)}$, es decir, multiplicar por w es **rotar** en φ y **escalar** por σ . Además $|z + w| \leq |z| + |w|$.

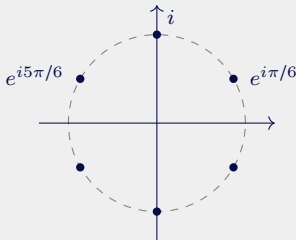
Importante: Aquí, $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ y si definimos $e(\theta) := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ entonces $e'(\theta) = ie(\theta)$ y $e(0) = 1$, por lo que $e(\theta) = e^{i\theta}$.

De Moivre y raíces n -ésimas

De $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ se obtiene la fórmula de **De Moivre**, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$, y también todas las soluciones de $z^n = w$ con $w = \sigma e^{i\varphi}$:

$$z_k = \sigma^{1/n} \exp\left(i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

es decir, n puntos equiespaciados sobre la circunferencia de radio $\sigma^{1/n}$.



En la figura, las seis raíces sextas de $-1 = e^{i\pi}$.

Regiones del plano

Usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} D(z_0, r) &:= \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - z_0| < r\}, & \mathbb{D} &:= D(0, 1), \\ \Gamma(z_0, r) &:= \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - z_0| = r\}, \\ A(z_0; r_1, r_2) &:= \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } r_1 < |z - z_0| < r_2\}. \end{aligned}$$



$D(z_0, r)$



$A(z_0; r_1, r_2)$

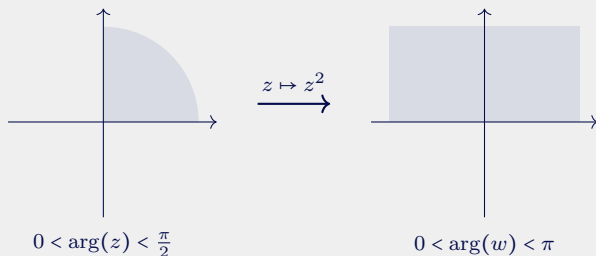


$|\operatorname{Im}(z)| < a$

La circunferencia $\Gamma(z_0, r)$ se recorre siempre en sentido antihorario. También usaremos $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y el semiplano superior $\{\operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Funciones complejas

Escribimos $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. El gráfico de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$ y no se dibuja; en su lugar se dibuja la **imagen de una región**.

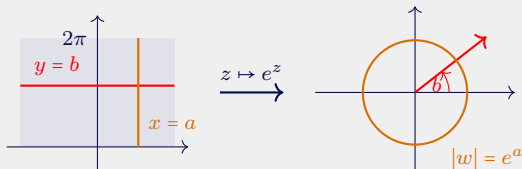


En polares $z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, es decir, **duplica los ángulos** y eleva al cuadrado el módulo. Del mismo modo $1/z = \rho^{-1} e^{-i\theta}$ invierte el módulo respecto de $\Gamma(0, 1)$ y refleja en el eje real. Más aún, se puede probar que manda rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

La exponencial compleja

$$e^z = e^{x+iy} := e^x (\cos(y) + i \sin(y)), \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$$

Se tiene $e^{z+w} = e^z e^w$, de donde $e^z e^{-z} = 1$ y por ende $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Además $\arg(e^z) = \operatorname{Im}(z)$ módulo 2π , y e^z es **periódica de periodo $2\pi i$** .



La franja $0 \leq \operatorname{Im}(z) < 2\pi$ se manda biyectivamente sobre $\mathbb{C}^*$.

Seno, coseno y las hiperbólicas

A partir de la exponencial se definen, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\cos(z) &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \sin(z) &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cosh(z) &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \sinh(z) &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2}.\end{aligned}$$

Al restringirlas al eje real coinciden con las funciones reales, y la propiedad fundamental $e^{z+w} = e^z e^w$ implica las identidades trigonométricas usuales. Además, $\sin(z)$ se anula sólo en $\pi\mathbb{Z}$ y $\cos(z)$ sólo en $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

Notar que $\cos(iy) = \cosh(y)$ y $\sin(iy) = i \sinh(y)$, luego $\cos$ y $\sin$ **no son acotadas** en $\mathbb{C}$. El siguiente acotamiento es bastante útil en la práctica:

$$|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im}(z)}.$$

§25. El logaritmo complejo

Resolver $e^z = w$

Sea $w \in \mathbb{C}^*$. Tomando módulo y argumento en $e^z = w$ se obtiene

$$\operatorname{Re}(z) = \ln |w| \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(z) = \arg(w) \text{ módulo } 2\pi,$$

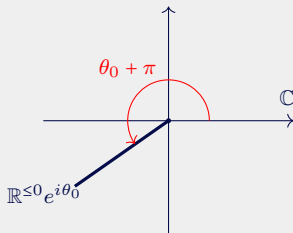
es decir, $z = \ln |w| + i \arg(w)$ módulo $2\pi i$. La ecuación posee entonces infinitas soluciones, que difieren en múltiplos enteros de $2\pi i$.

Observación: no existe manera de elegir una solución para cada w de forma continua en todo $\mathbb{C}^*$. Al dar una vuelta completa alrededor del origen, el argumento aumenta en 2π y no vuelve a su valor inicial.

Para evitar esta ambigüedad de **elegir** un argumento, procedemos de la siguiente manera.

Ramas del logaritmo

Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ y sea $\Omega_{\theta_0} := \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^{\leq 0} e^{i\theta_0})$, es decir, el plano menos la semirrecta de ángulo $\theta_0 + \pi$.



Para $z \in \Omega_{\theta_0}$, la **rama del argumento** $\arg_{\theta_0}(z)$ es el único ángulo en $]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[$ que representa a $\arg(z)$, y la **rama del logaritmo** es

$$\log_{\theta_0}(z) := \ln |z| + i \arg_{\theta_0}(z) \quad \text{para todo } z \in \Omega_{\theta_0}.$$

Con $\theta_0 = 0$ se obtiene la **rama principal**: $\text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi[$ y $\text{Ln}(z) = \ln |z| + i \text{Arg}(z)$, definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$. Por ejemplo, $\text{Ln}(i) = i \frac{\pi}{2}$.

Discontinuidad en el corte

Las funciones $\arg_{\theta_0}$ y $\log_{\theta_0}$ **no** se pueden extender de manera continua a $\mathbb{C}^*$. En efecto, en un punto de la semirrecta los límites por cada lado difieren en 2π y en $2\pi i$, respectivamente.

Ejemplo: con la rama principal y $z_1 = z_2 = e^{2\pi i/3}$ se tiene $z_1 z_2 = e^{-2\pi i/3}$, y entonces

$$\operatorname{Ln}(z_1) + \operatorname{Ln}(z_2) = \frac{4\pi i}{3} \quad \text{mientras que} \quad \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = -\frac{2\pi i}{3}.$$

Es decir, $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$ sólo vale módulo $2\pi i$.

La rama se elige según el dominio de trabajo. Para el semiplano superior sirve Ln , cuyo corte es $\mathbb{R}^{\leq 0}$; para integrales sobre $\mathbb{R}^{\geq 0}$ conviene $\log_{\pi}$, cuyo corte es $\mathbb{R}^{\geq 0}$.

Potencias complejas

El logaritmo complejo permite definir z^α para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$, teniendo en cuenta que se debe elegir una rama:

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log_{\theta_0}(z)) \quad \text{para todo } z \in \Omega_{\theta_0}.$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ el valor no depende de la rama y se recupera la potencia usual. Si $\alpha = 1/n$ se recupera una de las n raíces n -ésimas, la que corresponde a la rama elegida.

Ejemplo: con la rama principal, $\text{Ln}(i) = i\frac{\pi}{2}$ y por lo tanto

$$i^i = \exp\left(i \cdot i\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\pi/2} \approx 0,2079,$$

que es un número **real**. Es importante destacar que el valor de z^α depende de la rama escogida.

Ejercicio Probar que $i^i = e^{-5\pi/2}$ si se escoge la rama $\log_{2\pi}$.

§26. La derivada compleja

Definición

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que f es **derivable** en $z_0 \in \Omega$ si existe el límite

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{C}^*.$$

Si f es derivable en todo punto de Ω , decimos que es **holomorfa** en Ω ; si además $\Omega = \mathbb{C}$, decimos que f es **entera**.

La definición es formalmente idéntica a la del cálculo real. La diferencia está en que ahora $h \in \mathbb{C}$, de modo que h puede tender a 0 **por cualquier dirección del plano** y el cociente debe tender siempre al mismo número.

- 1 Determinar todas las raíces cúbicas de $-8i$, escribirlas en forma binomial (coordenadas cartesianas) y ubicarlas en el plano.
- 2 Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\sin(z) = 2$. Comparar con lo que ocurre en $\mathbb{R}$.
- 3 Calcular $\operatorname{Ln}(-1 + i)$ y $(1 + i)^i$ con la rama principal, y comparar con los valores que entrega la rama $\log_{2\pi}$.
- 4 Probar, directamente desde la definición, que $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

Hoy

- En forma polar, multiplicar por w es rotar en $\arg(w)$ y escalar por $|w|$; así se obtienen De Moivre y las raíces n -ésimas.
- e^z no se anula, es periódica de periodo $2\pi i$ y cumple $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im}(z)}$. Las funciones $\sin$ y $\cos$ no son acotadas en $\mathbb{C}$.
- El logaritmo es multivaluado: cada rama $\log_{\theta_0}$ está definida en el plano menos una semirrecta, y el valor de z^α depende de la rama.
- La derivada compleja exige el mismo límite por **todas** las direcciones; cerca de un punto.

Próxima clase

Derivada compleja y Ecuaciones de Cauchy–Riemann.

Gracias por su atención