

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 8

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

26 de agosto de 2026

§21. Funciones armónicas

Recuerdo de la vez pasada

Ya resolvimos (separación de variables) las dos EDP que involucran tiempo: el calor, con $T' = -\alpha\lambda_n T$, y la onda, con $T'' = -c^2\lambda_n T$. Hoy estudiaremos el caso de la EDP elíptica más importante (Ecuación de Laplace):

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Las soluciones se llaman funciones **armónicas**. Aquí no hay variable temporal, de modo que **todas** las condiciones son de borde y no hay condición inicial que imponer.

El método será el mismo, pero la ecuación en la "segunda variable" cambia: en vez de $Y'' = -\lambda Y$ tendremos $Y'' = +\lambda Y$, y las soluciones serán **hiperbólicas** en lugar de trigonométricas.

Recuerdo (deducción de la EDP)

La ecuación de Laplace aparece cada vez que un sistema alcanza el equilibrio.

- 1 **Estado estacionario del calor.** Si en $u_t = \alpha \Delta u$ el perfil deja de cambiar, entonces $u_t \equiv 0$ y queda $\Delta u = 0$. Es el perfil al que tiende una placa cuyo borde se mantiene a temperatura fija.
- 2 **Potencial electrostático.** De las leyes del electromagnetismo $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ y $\mathbf{E} = -\nabla V$ se obtiene $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$, y por ende se tiene $\Delta V = 0$ cuando no hay carga.

Cuando el lado derecho no es nulo, $\Delta u = F$, se tiene la **Ecuación de Poisson**. Todo lo que veremos hoy se adapta a ese caso restando una solución particular.

Los dos problemas de borde

$$(D) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(N) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

En el problema de **Dirichlet** se prescribe la temperatura del borde; en el de **Neumann**, el flujo de calor a través de él.

Integrando $\Delta u = 0$ sobre Ω y usando el Teorema de Green (ver Clase 1):

$$0 = \iint_{\Omega} \Delta u \, dA = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, ds = \oint_{\partial\Omega} g \, ds.$$

El problema de Neumann sólo tiene solución si $\oint_{\partial\Omega} g \, ds = 0$. En términos físicos, no se puede inyectar calor neto en una placa y que esté en equilibrio.

Teorema (principio del máximo)

Sea Ω acotado y u armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \text{y} \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Idea de la prueba: Si $\Delta v > 0$ en Ω , entonces v no puede tener un máximo interior, porque allí $v_{xx} \leq 0$ y $v_{yy} \leq 0$. Para u armónica se aplica esto a $v := u + \epsilon(x^2 + y^2)$, que cumple $\Delta v = 4\epsilon > 0$, y se hace $\epsilon \rightarrow 0$.

Observación: Físicamente, un punto interior más caliente que todo su entorno perdería calor y se enfriaría, y entonces el estado no sería estacionario.

Sean u_1, u_2 soluciones de (D) con el mismo dato f . Su diferencia $w = u_1 - u_2$ es armónica y vale 0 en $\partial\Omega$, de modo que por el principio del máximo

$$0 = \min_{\partial\Omega} w \leq w \leq \max_{\partial\Omega} w = 0 \quad \implies \quad w \equiv 0. \quad \square$$

Aplicando lo mismo a datos distintos f_1 y f_2 se obtiene además

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial\Omega} |f_1 - f_2|.$$

Es decir, un error pequeño en el dato de borde produce un error pequeño en la solución: el problema de Dirichlet es **estable**, y por lo tanto está bien planteado en el sentido de Hadamard (ver Clase 2).

Unicidad por el método de la energía

La primera identidad de Green, que no es más que integrar por partes en el plano, da para w armónica

$$\iint_{\Omega} |\nabla w|^2 dA = \oint_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} ds - \iint_{\Omega} w \underbrace{\Delta w}_{=0} dA.$$

Si $w = 0$ en $\partial\Omega$, o bien si $\partial w / \partial \mathbf{n} = 0$ en $\partial\Omega$, el borde se anula y queda $\iint_{\Omega} |\nabla w|^2 = 0$, luego $\nabla w \equiv 0$ y w es constante.

Con condición de Dirichlet la constante es 0 y se recupera la unicidad. Con Neumann la solución es única **salvo una constante aditiva**.

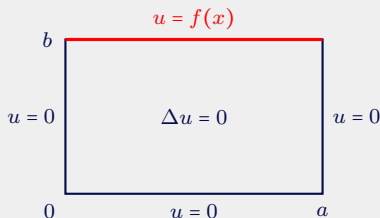
§22. Laplace en un rectángulo

Un lado activo

Resolvemos primero el caso en que el dato es no nulo en un solo lado:

$$\Delta u = 0 \text{ en } (0, a) \times (0, b), \quad u(x, b) = f(x),$$

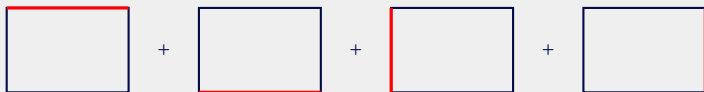
y $u = 0$ en los otros tres lados.



Los tres lados nulos son los que permiten separar: dos de ellos dan el problema de valores propios en x , y el tercero fija la constante en y .

Cuatro lados activos

Si el dato es no nulo en los cuatro lados, la linealidad permite descomponer el problema en cuatro como el anterior y sumar las soluciones (ver Clase 2).



En cada sumando el lado rojo lleva su dato y los otros tres son cero. Los dos últimos se resuelven igual que el primero, intercambiando x e y .

Separación de variables

Con $u = X(x)Y(y)$ la ecuación $X''Y + XY'' = 0$ se separa como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

Las condiciones $u(0, y) = u(a, y) = 0$ dan $X(0) = X(a) = 0$, de nuevo el problema de valores propios de siempre: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ y $X_n = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$.

Pero ahora $Y'' = \lambda_n Y$, con el signo opuesto al del calor y la onda:

$$Y_n(y) = \alpha_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right),$$

y la condición $u(x, 0) = 0$ obliga a $\alpha_n = 0$. Las soluciones fundamentales son entonces $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$.

La solución en el rectángulo

Superponiendo e imponiendo $u(x, b) = f(x)$ queda un desarrollo en serie de senos de f , cuyo coeficiente n -ésimo es $c_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$:

Solución del problema de Dirichlet en el rectángulo

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 1} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right),$$
$$c_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx.$$

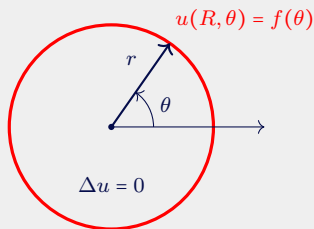
El denominador crece como $e^{n\pi b/a}$, de modo que los c_n decaen exponencialmente y la serie converge muy rápido para $y < b$.

§23. Laplace en un disco

Coordenadas polares

En un disco el borde no se describe bien en coordenadas cartesianas. Con $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, la regla de la cadena da

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$



Buscamos u en el disco $r < R$ con el dato f (condición de borde) prescrito en la circunferencia $r = R$.

Separación en el disco

Con $u = F(r)G(\theta)$, multiplicando por $r^2/(FG)$:

$$\frac{r^2 F'' + r F'}{F} = -\frac{G''}{G} = \lambda.$$

La **variable angular no tiene borde**: la condición es que G sea 2π -**periódica**. Es un problema de Sturm-Liouville periódico (ver Clase 5), y da $\lambda_n = n^2$ con $G_n \in \{1, \cos(n\theta), \sin(n\theta)\}$.

Para el radio queda $r^2 F'' + r F' - n^2 F = 0$ (**ecuación de Euler**): con $F = r^m$ se obtiene $m^2 = n^2$, luego $F = r^n$ o $F = r^{-n}$ (y $F = 1$ o $F = \ln r$ si $n = 0$).

Aquí la condición de borde que falta es de otro tipo: $r = 0$ es un punto singular de las coordenadas, y se descartan r^{-n} y $\ln r$ porque no son **acotadas** en el origen (ver Clase 5).

La solución en el disco

Superponiendo e imponiendo $u(R, \theta) = f(\theta)$ aparece la serie de Fourier completa de f :

Solución del problema de Dirichlet en el disco

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{r}{R} \right)^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)],$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Los coeficientes son los de f tal cual, y el factor $(r/R)^n$ es el que atenúa los modos altos hacia el centro. Es el análogo del cociente de senos hiperbólicos del rectángulo.

La propiedad del valor medio

Evaluando la serie en el centro $r = 0$ sobrevive sólo el término $n = 0$:

$$u(0) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta.$$

El valor de una función armónica en el centro de un disco es el **promedio** de sus valores sobre la circunferencia. Trasladando, lo mismo vale para cualquier disco contenido en Ω .

Cultura general: de aquí sale otra prueba del principio del máximo. Si u alcanzara su máximo en un punto interior, sería igual al promedio sobre una circunferencia pequeña en torno a él, y eso obliga a que u sea constante en esa circunferencia.

- 1 Resolver $\Delta u = 0$ en $(0, \pi) \times (0, \pi)$ con $u = 0$ en tres lados y $u(x, \pi) = \sin(2x)$.
- 2 Resolver el problema del disco de radio R con $f(\theta) = 1 + \cos \theta$, y verificar directamente que la solución es armónica.
- 3 Probar que si u es armónica en Ω y Ω es conexo, y u alcanza su máximo en un punto interior, entonces u es constante.
- 4 Encontrar la solución estacionaria de $u_t = \alpha \Delta u$ en un anillo $R_1 < r < R_2$ con $u = T_1$ en $r = R_1$ y $u = T_2$ en $r = R_2$, suponiendo que no depende de θ .

Hoy

- Sin tiempo, todas las condiciones son de borde: Dirichlet fija u y Neumann fija $\partial u / \partial \mathbf{n}$, este último sólo si $\oint g \, ds = 0$.
- El **principio del máximo** da unicidad y estabilidad.
- En el rectángulo, X_n son senos y Y_n senos **hiperbólicos**: el dato de borde se atenúa como $e^{-n\pi(b-y)/a}$ hacia el interior.
- En el disco, la periodicidad en θ da la serie de Fourier completa y la ecuación de Euler da r^n .

Próxima clase

Ejercicios.

Gracias por su atención