

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 7

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

24 de agosto de 2026

§18. La cuerda con extremos fijos

Recuerdo de la vez pasada

Recuerdo: ya discutimos separación de variables (Clase 4), el problema de Sturm-Liouville que ella produce (Clase 5) y el desarrollo en serie del dato inicial (Clase 6). Hoy lo aplicaremos a la EDP:

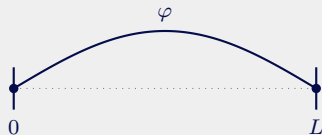
$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ en } (0, L) \times \mathbb{R}^{>0}, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

La ecuación es de **segundo orden en el tiempo**. Se necesitan **dos** condiciones iniciales: la posición $u(x, 0) = \varphi(x)$ y la velocidad $u_t(x, 0) = \psi(x)$.

El problema modelo

Una cuerda de largo L sujeta en sus dos extremos, que se suelta desde una posición inicial conocida a una velocidad conocida :

$$(O) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{en } (0, L) \times \mathbb{R}^{>0}, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{para todo } t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{para todo } x \in (0, L). \end{cases}$$



Con $c^2 = T/\rho$ (con T la tensión y ρ la densidad).

El mismo problema de valores propios

Buscando $u(x, t) = X(x)T(t)$ no nula y dividiendo por $c^2 XT$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda,$$

y las CB dan $X(0) = X(L) = 0$. El problema en X es idéntico al del calor:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \geq 1.$$

Por el cociente de Rayleigh (ver Clase 5) sabemos además que $\lambda_n > 0$ sin necesidad de discutir los tres casos.

Observación: el mismo problema de S–L servirá para cualquier EDP lineal en $(0, L)$ **con estas condiciones de borde**. Cambiar la EDP sólo cambia la ecuación en T .

La ecuación en T (oscilaciones)

Para cada λ_n la ecuación temporal es ahora de **segundo orden**:

$$T'' + c^2 \lambda_n T = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t),$$

con dos constantes libres A_n y B_n por cada modo.

$$\omega_n = c\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi c}{L} \quad (\text{frecuencia angular del modo } n).$$

Diferencia con el calor: Allí $T' = -\alpha\lambda_n T$ daba $e^{-\alpha\lambda_n t}$, que **decae**; acá $T'' = -c^2\lambda_n T$ da senos y cosenos, que **oscilan** sin perder amplitud.

La solución en serie

Superponiendo las soluciones fundamentales $u_n = T_n(t)X_n(x)$ e imponiendo los datos en $t = 0$:

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \psi(x) = \sum_{n \geq 1} \omega_n B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Ambos son desarrollos en serie de senos, y por lo visto en la Clase 6:

Solución del problema de Dirichlet para la onda

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$
$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

El factor extra $1/\omega_n$ en B_n viene de derivar $\sin(\omega_n t)$ en $t = 0$.

Conservación de la energía

Multiplicamos la EDP por u_t e integramos en $(0, L)$. El primer término es una derivada exacta en t , y el segundo se integra por partes en x :

$$u_t u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_t^2}{2} \right), \quad \int_0^L u_t u_{xx} dx = \left[u_x u_t \right]_0^L - \int_0^L u_x u_{xt} dx,$$

y en esta última integral $u_x u_{xt} = \partial_t (u_x^2/2)$. Juntando ambos términos:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx \quad \implies \quad E'(t) = c^2 \left[u_x u_t \right]_0^L.$$

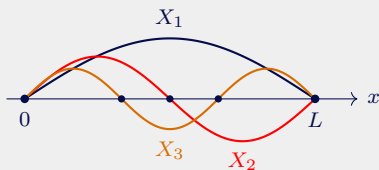
Las CB valen **para todo** t , así que derivando $u(0, t) = u(L, t) = 0$ en t se obtiene $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$: el corchete se anula y E es constante.

Aplicado a la diferencia de dos soluciones con los mismos datos, esto da la **unicidad**: si $\varphi = \psi = 0$ entonces $E(0) = 0$, luego $E \equiv 0$, de donde se deduce $u_x \equiv u_t \equiv 0$ y $u \equiv 0$.

§19. Modos, frecuencias y timbre

Los modos normales

Cada término u_n es un **modo normal**: un perfil fijo X_n cuya amplitud oscila con una sola frecuencia ω_n . Los puntos donde X_n se anula quedan quietos y se llaman **nodos**.



X_n tiene $n - 1$ nodos interiores, en $x = \frac{kL}{n}$ con $k = 1, \dots, n - 1$.

Las frecuencias son **múltiplos enteros** de la frecuencia más baja.

$$\omega_n = n \omega_1, \quad \omega_1 = \frac{\pi c}{L} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

ω_1 es la **frecuencia fundamental** y las demás son sus **armónicos**.

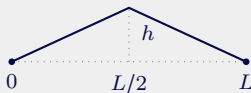
Cultura general: De $\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{T/\rho}$ se deducen las tres formas de afinar un instrumento de cuerda:

- 1 Cambiar la **tensión** T (las clavijas).
- 2 Cambiar el **largo** L (los dedos sobre el diapasón).
- 3 Cambiar la **densidad** ρ (las cuerdas graves son más gruesas).

Ejemplo: la cuerda pulsada

Una guitarra: se levanta la cuerda en su punto medio hasta una altura h y se suelta. Como se suelta desde el reposo, $\psi \equiv 0$ y por lo tanto $B_n = 0$; el dato de posición es el perfil triangular

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ \frac{2h}{L} (L - x) & \text{si } \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$



Hay que calcular $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$, partiendo la integral en $[0, \frac{L}{2}]$ y $[\frac{L}{2}, L]$.

La cuerda pulsada (cálculo)

En la segunda mitad sustituimos $x \mapsto L - x$. Como $\varphi(L - x) = \varphi(x)$ y

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}(L - x)\right) = \sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{L}x\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

las dos mitades dan lo mismo si n es **impar** y se cancelan si n es **par**. Para n impar queda $A_n = \frac{8h}{L^2} \int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$, e integrando por partes con $a = \frac{n\pi}{L}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{L/2} x \sin(ax) dx &= \left[-\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2} \right]_0^{L/2} \\ &= -\frac{L}{2a} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{a^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Si n es impar el primer término se anula, y $1/a^2 = L^2/(n^2\pi^2)$.

$$A_n = \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

es decir $A_{2k} = 0,$ $A_{2k+1} = \frac{8h(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$

La cuerda pulsada (solución)

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos(\omega_{2k+1} t) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{L} x\right).$$

Los armónicos **pares desaparecen** (el punto medio es un nodo de todos ellos).

Los coeficientes son de orden $1/n^2$, de modo que la serie converge rápido: unos pocos armónicos bastan para reproducir el sonido.

Ejercicio Repetir el cálculo pulsando en $x = L/4$ y decidir qué armónicos se pierden ahora.

Ejemplo: la cuerda golpeada

Un piano: el martillo entrega velocidad sin alcanzar a desplazar la cuerda, de modo que $\varphi \equiv 0$ (luego $A_n = 0$) y ψ está concentrada cerca del punto de impacto x_0 :

$$\psi(x) = \begin{cases} v_0 & \text{si } |x - x_0| \leq \epsilon, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad \text{con } \epsilon \text{ pequeño.}$$

Ahora sólo hay que integrar sobre el intervalo donde ψ no se anula, y escribiendo $A = \frac{n\pi}{L}(x_0 - \epsilon)$ y $B = \frac{n\pi}{L}(x_0 + \epsilon)$:

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} v_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2v_0L}{n^2\pi^2c} [\cos A - \cos B].$$

La cuerda golpeada (cálculo)

Aquí $\frac{A+B}{2} = \frac{n\pi}{L}x_0$ y $\frac{B-A}{2} = \frac{n\pi}{L}\epsilon$, de donde¹

$$B_n = \frac{4Lv_0}{n^2\pi^2c} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\epsilon\right),$$
$$u(x,t) = \sum_{n \geq 1} B_n \sin(\omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Mientras n sea pequeño frente a L/ϵ , el segundo seno vale $\sin\left(\frac{n\pi\epsilon}{L}\right) \approx \frac{n\pi\epsilon}{L}$ y el n del numerador se cancela con uno del denominador:

$$B_n \approx \frac{4\epsilon v_0}{n\pi c} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \quad (\text{coeficientes de orden } 1/n).$$

Golpear excita muchos más armónicos altos que pulsar, donde los A_n eran de orden $1/n^2$, y por eso los dos instrumentos suenan distinto tocando la misma nota.

¹Recordar que $\cos(A) - \cos(B) = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$.

§20. d'Alembert en $(0, L)$

La serie es d'Alembert

Tomemos $\psi \equiv 0$, de modo que $u = \sum A_n \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Usando $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$ con $a = \frac{n\pi}{L}x$ y $b = \omega_n t$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} A_n \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x - ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x + ct)\right) \right].$$

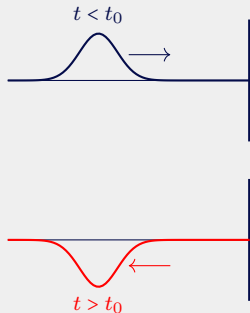
Cada suma es la misma serie de senos evaluada en otro punto, es decir:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\tilde{\varphi}(x - ct) + \tilde{\varphi}(x + ct) \right],$$

donde $\tilde{\varphi}$ es la extensión **impar** y $2L$ -periódica de φ . Recuperamos la fórmula de d'Alembert de la Clase 3, ahora en el intervalo $(0, L)$.

Las condiciones de borde son reflexiones

La imparidad de $\tilde{\varphi}$ es lo que hace que $u(0,t) = 0$ para todo t . Físicamente, la onda que llega al extremo fijo **se refleja invirtiendo su signo**.



El pulso reflejado es la imagen espejo y el negativo de la onda que llega.

La solución es periódica en el tiempo

Como $\tilde{\varphi}$ tiene período $2L$, la fórmula anterior da de inmediato

$$u\left(x, t + \frac{2L}{c}\right) = u(x, t) \quad \text{para todo } x, t.$$

Lo mismo se ve en la serie: todas las frecuencias $\omega_n = n\omega_1$ son múltiplos de ω_1 , así que el período común es $2\pi/\omega_1 = 2L/c$.

La cuerda vuelve exactamente a su estado inicial cada $2L/c$ segundos: el tiempo que tarda una perturbación en recorrer la cuerda de ida y vuelta.

- 1 Resolver la ecuación de onda con $\varphi(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$ y $\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$, y describir el movimiento resultante.
- 2 Calcular los coeficientes de la cuerda pulsada en $x = L/3$ y determinar qué armónicos se anulan.
- 3 Resolver el problema con extremos libres $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$ y datos φ, ψ . ¿Qué representa el término correspondiente a $\lambda_0 = 0$?
- 4 Probar que si φ y ψ se anulan fuera de un intervalo $[a, b] \subseteq (0, L)$, entonces $u(x, t) = 0$ mientras $ct < \min\{a, L - b\}$ y x esté fuera del intervalo.

Hoy

- La onda en $(0, L)$ produce el **mismo** problema de valores propios que el calor; lo que cambia es $T'' + c^2 \lambda_n T = 0$, que oscila en vez de decaer.
- $u = \sum [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ con $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$; los A_n y B_n son coeficientes de senos de φ y ψ .
- Las frecuencias son **armónicos** $\omega_n = n\omega_1$.
- La energía $E = \frac{1}{2} \int (u_t^2 + c^2 u_x^2)$ se conserva, y la serie coincide con d'Alembert para la extensión impar $2L$ -periódica.

Próxima clase

La ecuación de **Laplace** (EDP elíptica). Sin tiempo, todas las condiciones son de borde, y las funciones de T se vuelven hiperbólicas.

Gracias por su atención