

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 6

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

19 de agosto de 2026

§15. Series de Fourier

Recuerdo de la vez pasada

El teorema espectral asegura que las funciones propias de un problema de Sturm-Liouville forman una **base ortogonal**, y que toda $f \in L_w^2$ admite un desarrollo en esa base. Hoy trabajamos con el caso periódico en $(-L, L)$:

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}_{n \geq 1}.$$

Los desarrollos en esta base se llaman **series de Fourier**. Es el caso más importante, tanto por sus aplicaciones como porque en él se puede decir **exactamente** qué significa la convergencia.

Hasta ahora manipulamos las series formalmente: intercambiamos $\sum$ con $\int$ y con las derivadas sin justificarlo. Hoy veremos cuándo es posible.

Las relaciones de ortogonalidad

Escribiendo $c_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ y $s_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, un cálculo directo con las fórmulas de producto a suma da, usando la notación δ_{nm} ¹, para $n, m \geq 1$:

$$\int_{-L}^L c_n c_m dx = L \delta_{nm}, \quad \int_{-L}^L s_n s_m dx = L \delta_{nm}, \quad \int_{-L}^L s_n c_m dx = 0.$$

La última no necesita cálculo: $s_n c_m$ es **impar** y el intervalo es simétrico. Además $\int_{-L}^L 1 dx = 2L$ y $\int_{-L}^L c_n dx = \int_{-L}^L s_n dx = 0$.

Observación: Usando la notación $\langle f, g \rangle := \int_{-L}^L f(x)g(x) dx$ y con ello se define la norma $\|f\|^2 := \langle f, f \rangle$, tenemos que $\|1\| = \sqrt{2L}$ y $\|c_n\| = \|s_n\| = \sqrt{L}$. Esa asimetría es la razón del $a_0/2$ que aparece a continuación.

¹El **delta de Kronecker** δ_{nm} vale 1 si $n = m$ y vale 0 si $n \neq m$.

Serie de Fourier de f en $(-L, L)$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right],$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

- El símbolo $\sim$ recuerda que, por ahora, la igualdad no está justificada.
- Con el factor $a_0/2$ la fórmula de a_n vale también para $n = 0$:
 $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f$ es el **promedio** de f .
- Si f es **par** todos los b_n se anulan, y si es **impar** todos los a_n se anulan.

Los coeficientes minimizan el error

Los a_n, b_n son las únicas constantes que minimizan el **error cuadrático**: Sea

$$T_N(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N [A_n c_n(x) + B_n s_n(x)]$$

un polinomio trigonométrico cualquiera, y escribamos

$$\Sigma_N = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2), \quad \Delta_N = \frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^N [(A_n - a_n)^2 + (B_n - b_n)^2].$$

Desarrollando el cuadrado y usando la ortogonalidad:

$$\|f - T_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - L \Sigma_N + L \Delta_N.$$

El único término que depende de T_N es $\Delta_N \geq 0$, y se anula exactamente cuando $A_n = a_n$ y $B_n = b_n$ para todo n . En tal caso $T_N = S_N$ (suma parcial de Fourier).

Bessel y Parseval

Tomando $T_N = S_N$ la suma parcial de Fourier, tenemos $\Delta_N = 0$ y queda $\|f - S_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - L \Sigma_N(a, b) \geq 0$, es decir:

Desigualdad de Bessel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx \quad \text{para todo } N.$$

En particular la serie de la izquierda converge, y por lo tanto $a_n \rightarrow 0$ y $b_n \rightarrow 0$.

Que el sistema trigonométrico sea **completo** (Teorema espectral) equivale a que $\|f - S_N\|_2 \rightarrow 0$, y entonces la desigualdad se vuelve igualdad:

Identidad de Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx.$$

Ejemplo: $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$

Como f es impar, $a_n = 0$ para todo n . Integrando por partes:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

$$x \sim 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad x \in (-\pi, \pi).$$

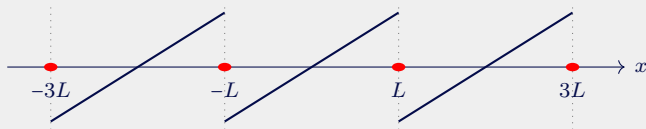
Parseval da $\sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$, de donde

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{problema de Basilea}).$$

§16. Convergencia

La extensión $2L$ -periódica

Todos los términos de la serie tienen período $2L$. La serie no puede entonces converger a f fuera de $(-L, L)$, sino a su **extensión $2L$ -periódica $\tilde{f}$** .



En los puntos donde $\tilde{f}$ salta, la serie no puede elegir entre los dos valores laterales: converge al **promedio** de ambos, marcado en rojo.

Teorema de Dirichlet

Decimos que f es **continua por trozos** en $[-L, L]$ si es continua salvo en un número finito de puntos, y en cada uno de ellos existen los límites laterales $f(x^+)$ y $f(x^-)$.

Teorema (Dirichlet)

Si f y f' son continuas por trozos en $[-L, L]$, entonces para todo x la serie de Fourier converge, y

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

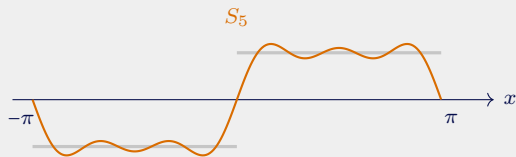
En los puntos de continuidad esto es simplemente $S(x) = f(x)$. En los extremos $x = \pm L$ el valor es $\frac{f(-L^+) + f(L^-)}{2}$, porque los saltos de $\tilde{f}$ están allí.

No se pide continuidad ni derivabilidad, sólo que los saltos sean finitos y en cantidad finita. Casi cualquier problema físico las cumple.

Ejemplo: función de Heaviside

Para $f = -1$ en $(-\pi, 0)$ y $f = 1$ en $(0, \pi)$ los a_n se anulan y se calcula que $b_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]$:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$



El ejemplo anterior muestra que el problema es la discontinuidad. Si no la hay, la convergencia mejora:

Teorema

Si f es continua en $[-L, L]$, con f' continua por trozos y $f(-L) = f(L)$, entonces

$$\sum_{n \geq 1} (|a_n| + |b_n|) < +\infty,$$

y la serie de Fourier converge **absoluta y uniformemente** a f en $[-L, L]$.

La condición $f(-L) = f(L)$ es exactamente lo que hace que $\tilde{f}$ sea continua.

Derivar e integrar la serie

Integrar: siempre se puede pues f es continua por trozos, la serie de $\int_0^x f$ se obtiene integrando término a término, y converge aunque la de f no.

Derivar: es delicado porque multiplica el coeficiente n -ésimo por $\frac{n\pi}{L}$ y "empeora el decaimiento". Si f es continua, $f(-L) = f(L)$ y f' es continua por trozos, entonces sí vale:

$$f' \sim \sum_{n \geq 1} \frac{n\pi}{L} (b_n c_n - a_n s_n).$$

Sin la condición $f(-L) = f(L)$ el resultado es **falso**: derivando la serie de $f(x) = x$ del ejemplo se obtiene $2 \sum (-1)^{n+1} \cos(nx)$, que no converge en ningún punto, mientras que $f' \equiv 1$.

§17. Series de senos y de cosenos

Extender para elegir la base

En los problemas de EDP el intervalo es $(0, L)$, no $(-L, L)$, y la base la fijan las condiciones de borde (ver Clase 5). La forma de conciliar ambas cosas es **extender** f a $(-L, L)$:

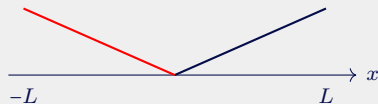
extensión impar $\leadsto$ serie de senos, extensión par $\leadsto$ serie de cosenos.

Los coeficientes se calculan sin salir de $(0, L)$, porque el integrando resulta par en ambos casos:

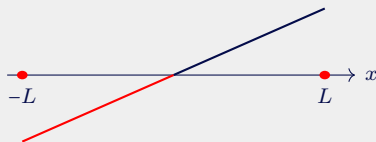
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Las dos extensiones de una misma f

extensión **par**



extensión **impar**



Para $f(x) = x$ en $(0, L)$: la extensión par es continua y su serie de cosenos converge uniformemente; la impar salta en $\pm L$, y su serie de senos converge al promedio 0 allí.

Ejemplo: $f(x) = x$ en $(0, L)$

Serie de senos. Integrando por partes, $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi}$, de modo que

$$x \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (\text{coeficientes de orden } 1/n).$$

Serie de cosenos. Ahora $a_0 = L$ y $a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]$, es decir

$$x \sim \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right) \quad (\text{orden } 1/n^2).$$

Las dos series representan la **misma** función en $(0, L)$, pero la de cosenos converge mucho más rápido. La diferencia está en las extensiones: una es continua y la otra no.

De vuelta al problema del calor

Con esto queda justificada la solución de la Clase 4. Si g y g' son continuas por trozos en $[0, L]$:

- 1 Los coeficientes b_n existen y están acotados por $\frac{2}{L} \int_0^L |g|$.
- 2 Para $t > 0$ el factor $e^{-\alpha \lambda_n t}$ domina cualquier crecimiento en n , así que la serie y todas sus derivadas convergen uniformemente.
- 3 En $t = 0$ la serie converge a g salvo en los saltos, donde converge al promedio.

Las discontinuidades se ven cuando la condición inicial g no se anula en los extremos, como en el ejemplo de la barra a temperatura constante.

- 1 Calcular la serie de Fourier de $f(x) = |x|$ en $(-\pi, \pi)$ y deducir $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
- 2 Calcular la serie de senos y la de cosenos de $f(x) = 1$ en $(0, L)$.
- 3 Para $f(x) = x^2$ en $(-\pi, \pi)$, calcular la serie y evaluarla en $x = \pi$ para obtener $\sum 1/n^2$. Aplicar Parseval y calcular el valor de $\sum 1/n^4$.
- 4 Decidir en cuáles de los ejercicios anteriores la convergencia es uniforme.

Hoy

- Los coeficientes de Fourier son los que minimizan el error cuadrático, y satisfacen la desigualdad de **Bessel** y la identidad de **Parseval**.
- **Dirichlet**: si f y f' son continuas por trozos, la serie converge en todo punto al promedio de los límites laterales.
- La convergencia es **uniforme** cuando la extensión periódica es continua.
- En $(0, L)$ la extensión impar da la serie de senos y la par la de cosenos.

Próxima clase

Volvemos a separar variables, ahora en la ecuación de **onda**: la misma base de senos, pero con una EDO de segundo orden en el tiempo.

Gracias por su atención