

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 5

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

17 de agosto de 2026

§12. Problemas de Sturm–Liouville

Recuerdo de la vez pasada

Al separar variables, la parte espacial siempre produce la misma pregunta: para qué valores de λ un problema con una condición en cada extremo admite solución no nula.

$$X'' + \lambda X = 0 \text{ en } (0, L), \quad \text{más dos condiciones de borde.}$$

Con $X(0) = X(L) = 0$ obtuvimos $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ y $X_n = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ (ver Clase 4). Pero las CB pueden ser otras, y en coordenadas polares la EDO en el radio **ni siquiera tiene coeficientes constantes**.

Conviene entonces estudiar de una vez la clase completa de problemas de este tipo, y responder dos preguntas: ¿por qué las funciones propias resultaron **ortogonales**, y por qué hay **infinitas**?

El problema regular

Problema regular de Sturm–Liouville

Encontrar los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$(p(x) X')' + q(x) X + \lambda w(x) X = 0 \text{ en } (a, b),$$

$$\alpha_0 X(a) + \alpha_1 X'(a) = 0, \quad \beta_0 X(b) + \beta_1 X'(b) = 0,$$

tiene solución $X \not\equiv 0$, con p, p', q, w continuas en $[a, b]$ y con $p > 0$ y $w > 0$.

La ecuación está escrita en **forma autoadjunta**: el término de mayor orden aparece dentro de una derivada. Las condiciones se llaman **separadas**, pues cada una involucra un solo extremo; se pide (α_0, α_1) y $(\beta_0, \beta_1) \neq (0, 0)$.

El adjetivo **regular** exige que $[a, b]$ sea acotado y que p y w no se anulen en los extremos. En caso contrario el problema se dice **singular**.

La forma autoadjunta

Una EDO lineal de segundo orden está en **forma autoadjunta** cuando el término de mayor orden aparece dentro de una derivada:

$$(p X')' + q X + \lambda w X = 0.$$

Toda ecuación $X'' + P(x)X' + Q(x)X + \lambda R(x)X = 0$ se lleva a esa forma multiplicándola por un factor integrante:

$$p(x) = e^{\int P(x) dx}, \quad q = p Q, \quad w = p R.$$

En efecto $p' = pP$, de modo que $p(X'' + PX') = pX'' + p'X' = (pX')'$.

Ejemplo: para $X'' - 2X' + \lambda X = 0$ se tiene $p = e^{-2x}$, y la ecuación se escribe $(e^{-2x} X')' + \lambda e^{-2x} X = 0$, un problema de S-L con peso $w = e^{-2x}$.

Ejercicio Escribir $X'' + \frac{2}{x}X' + \lambda X = 0$ en forma autoadjunta.

Observación: es la parte radial del laplaciano en $\mathbb{R}^3$.

La identidad de Lagrange

Escribimos el problema como $\mathcal{L}X = -\lambda wX$, con $\mathcal{L}(X) := (pX')' + qX$.

Lema

$$\int_a^b [(\mathcal{L}X)Y - X(\mathcal{L}Y)]dx = \left[p(X'Y - XY') \right]_a^b.$$

Prueba: Los términos con q se cancelan, y para el resto basta integrar por partes:

$$\int_a^b (pX')'Y \, dx = \left[pX'Y \right]_a^b - \int_a^b pX'Y' \, dx,$$

cuyo último término es simétrico en X e Y . Restando la identidad con los roles intercambiados se concluye. $\square$

Si X e Y satisfacen las CB separadas, el corchete se **anula**: en $x = a$ los vectores $(X(a), X'(a))$ y $(Y(a), Y'(a))$ resuelven $\alpha_0 u + \alpha_1 v = 0$, luego son paralelos. Similar para $x = b$.

§13. Ortogonalidad y espectro

Ortogonalidad de las funciones propias

Sean X_n y X_m funciones propias con $\lambda_n \neq \lambda_m$. Como ambas cumplen las CB, la identidad de Lagrange da

$$0 = \int_a^b \left[(\mathcal{L}X_n)X_m - X_n(\mathcal{L}X_m) \right] dx = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b X_n X_m w \, dx,$$

y como $\lambda_m \neq \lambda_n$, la integral se anula. □

Como $w > 0$, la expresión $\langle f, g \rangle_w := \int_a^b f g w \, dx$ es un producto interno en (a, b) , y lo anterior dice:

$$\lambda_n \neq \lambda_m \implies \langle X_n, X_m \rangle_w = 0.$$

La ortogonalidad de los senos de la Clase 4 es un caso particular de esto: proviene de las condiciones de borde y no de una identidad trigonométrica.

Los valores propios son reales

Nada obliga a priori a que λ sea **real**. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es valor propio con función propia X , y aplicamos la identidad de Lagrange a X y $\overline{X}$: como los coeficientes p, q, w son reales, $\overline{X}$ es función propia de $\overline{\lambda}$, y

$$0 = (\overline{\lambda} - \lambda) \int_a^b X \overline{X} w \, dx = (\overline{\lambda} - \lambda) \int_a^b |X|^2 w \, dx.$$

La integral es estrictamente positiva porque $w > 0$ y $X \not\equiv 0$, luego $\overline{\lambda} = \lambda$. $\square$

Observación: el mismo argumento muestra que las funciones propias pueden elegirse reales, pues las partes real e imaginaria de X resuelven el mismo problema.

Teorema (Sturm–Liouville regular)

Para un problema regular de S–L:

- 1 Hay una sucesión infinita de valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow +\infty$.
- 2 Cada λ_n es **simple**: su función propia X_n es única salvo constante, y tiene exactamente $n - 1$ ceros en (a, b) .
- 3 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ es una **base ortogonal** de $L_w^2(a, b)$.

La demostración de (3) corresponde a cursos más avanzados de EDP y de Análisis Funcional. Aquí, $f \in L_w^2(a, b)$ si $\int_a^b f^2 w \, dx < +\infty$.

El punto (3) garantiza que el dato inicial **se puede** desarrollar en la base de funciones propias (comparar con el cálculo de coeficientes b_n en Clase 4).

Desarrollo en funciones propias

Si $f = \sum_{n \geq 1} c_n X_n$, multiplicando por $X_m w$ e integrando, la ortogonalidad elimina todos los términos salvo uno:

$$c_n = \frac{\langle f, X_n \rangle_w}{\|X_n\|_w^2} = \frac{\int_a^b f X_n w \, dx}{\int_a^b X_n^2 w \, dx}.$$

Es la misma fórmula de la Clase 4, ahora con peso. Para $X_n = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ se tiene $w \equiv 1$ y $\|X_n\|^2 = L/2$, y se recupera $c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f X_n \, dx$.

Observación práctica: conviene **no** normalizar las funciones propias: es más cómodo arrastrar el factor $\|X_n\|_w^2$ en el denominador.

El signo de los valores propios

Multiplicando $(pX')' + qX = -\lambda wX$ por X e integrando por partes:

$$\lambda \int_a^b X^2 w \, dx = \left[-p X' X \right]_a^b + \int_a^b \left(p (X')^2 - q X^2 \right) dx.$$

$$\lambda_n = \frac{\left[-p X'_n X_n \right]_a^b + \int_a^b \left(p (X'_n)^2 - q X_n^2 \right) dx}{\int_a^b X_n^2 w \, dx} \quad (\text{cociente de Rayleigh})$$

Si $q \leq 0$ y las CB son de Dirichlet o de Neumann, el término de borde se anula y el numerador es ≥ 0 : entonces $\lambda_n \geq 0$.

Esto descarta los casos $\lambda < 0$ de la Clase 4 sin resolver ninguna ecuación, y vale igual para coeficientes variables.

Ejemplo: coeficientes variables

Consideremos $x^2 X'' + xX' + \lambda X = 0$ en $(1, e)$ con $X(1) = X(e) = 0$. Aquí $P = 1/x$, luego $p = x$:

$$(x X')' + \lambda \frac{1}{x} X = 0, \quad \text{peso } w(x) = 1/x.$$

Ecuación de Euler: con $X = x^m$ se obtiene $m^2 = -\lambda$, luego para $\lambda > 0$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad X_n(x) = \sin(n\pi \ln x), \quad n \geq 1.$$

Son ortogonales con el peso $1/x$: el cambio $t = \ln x$ lleva $\int_1^e X_n X_m \frac{dx}{x}$ a $\int_0^1 \sin(n\pi t) \sin(m\pi t) dt$.

Ecuación de Euler

En $ax^2 X'' + bxX' + cX = 0$ si $X = x^m$ entonces $am(m-1) + bm + c = 0$.
Con raíces $\sigma \pm i\omega$ la solución es $x^\sigma [A \cos(\omega \ln x) + B \sin(\omega \ln x)]$.

§14. Valores propios y condiciones de borde

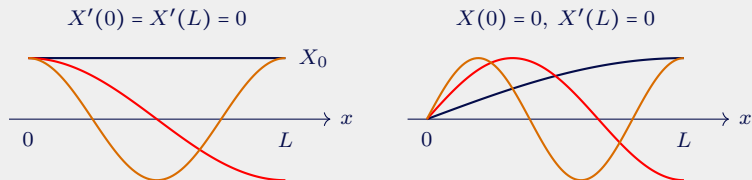
Las cuatro condiciones separadas en $(0, L)$

Para $X'' + \lambda X = 0$ en $(0, L)$, con $p = w = 1$:

Condiciones de borde	λ_n	$X_n(x)$
$X(0) = X(L) = 0$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \geq 1$	$\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
$X'(0) = X'(L) = 0$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \geq 0$	$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
$X(0) = 0, \quad X'(L) = 0$	$\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$	$\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)$
$X'(0) = 0, \quad X(L) = 0$	$\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$	$\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)$

Sólo el caso de Neumann tiene $\lambda_0 = 0$: allí $X_0 \equiv 1$, que es la temperatura promedio de la barra aislada.

Las primeras funciones propias



A la izquierda, las tres primeras funciones propias de Neumann: todas llegan a los extremos con tangente horizontal. A la derecha, las del caso mixto: se anulan en 0 y tienen tangente horizontal en L , de modo que en $[0, L]$ cabe un cuarto de onda, tres cuartos, cinco cuartos.

La condición de Robin

Un extremo que intercambia calor con el ambiente a temperatura 0 satisface $X'(L) + hX(L) = 0$ con $h > 0$ (ley de enfriamiento de Newton). Junto con $X(0) = 0$, de $X = \sin(\sqrt{\lambda}x)$ se obtiene

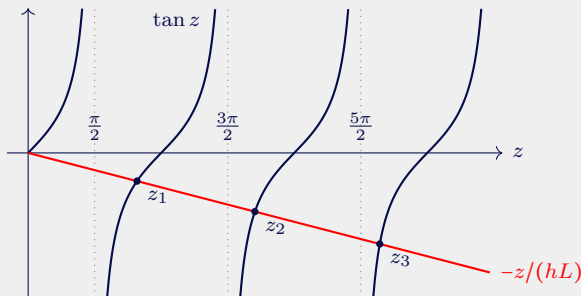
$$\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}L) + h \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

$$\tan(z) = -\frac{z}{hL}, \quad z := \sqrt{\lambda}L.$$

Cultura general (no evaluado)

Es una ecuación **trascendente**: no hay fórmula cerrada para sus raíces. Sin embargo, el teorema espectral asegura que hay infinitas, y la figura siguiente muestra dónde están.

Resolución gráfica



Hay exactamente una raíz z_n en cada rama decreciente, y $\lambda_n = (z_n/L)^2$. Para n grande la recta corta cerca de la asíntota, de modo que $z_n \rightarrow \frac{(2n-1)\pi}{2}$ y los valores propios se parecen a los del caso mixto.

Cultura general: Problemas singulares

Cuando p se anula en un extremo, la condición de borde separada se reemplaza por pedir que X y pX' sean **acotadas** allí. El término de borde de la identidad de Lagrange se anula igual, y con él sobreviven la ortogonalidad y el desarrollo. Por ejemplo:

$$((1-x^2)X')' + \lambda X = 0 \quad \leadsto \quad \lambda_n = n(n+1), \quad X_n = P_n(x),$$

los **polinomios de Legendre**, ortogonales en $(-1, 1)$ con peso $w \equiv 1$. Del mismo modo, $x^2 X'' + xX' + (\lambda x^2 - \nu^2)X = 0$ tiene $p = w = x$ y produce las funciones de **Bessel** J_ν , ortogonales con peso $w(x) = x$.

Ambas aparecen al separar variables en coordenadas polares y esféricas: son los "senos y cosenos" del disco y de la esfera.

Condiciones periódicas

En $(-L, L)$ con $X(-L) = X(L)$ y $X'(-L) = X'(L)$ las condiciones **no** son separadas, pero el término de borde de la identidad de Lagrange también se anula, porque p toma el mismo valor en ambos extremos.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n \in \left\{1, \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}.$$

Se pierde la **multiplicidad** 1: cada λ_n con $n \geq 1$ tiene **dos** funciones propias independientes. La ortogonalidad se mantiene, y basta verificar a mano que el seno y el coseno de un mismo n son ortogonales entre sí.

Observación: este es el caso que produce la serie de Fourier completa, y el que aparece al separar variables en el disco, donde la variable angular es periódica por construcción.

- 1 Escribir $X'' + 2X' + (1 + \lambda)X = 0$ en forma autoadjunta e identificar p , q y w .
- 2 Resolver el problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ en $(0, L)$ con $X'(0) = 0$, $X(L) = 0$, y verificar la fila correspondiente de la tabla.
- 3 Usar el cociente de Rayleigh para probar que si $q \leq 0$ y las CB son de Dirichlet, entonces $\lambda_1 > 0$.
- 4 Para $x^2 X'' + 3xX' + \lambda X = 0$ en $(1, e)$ con $X(1) = X(e) = 0$, encontrar p , w , los valores propios y las funciones propias.

Hoy

- Un problema regular de S-L es $(pX')' + qX + \lambda wX = 0$ con condiciones separadas.
- La **identidad de Lagrange** más las CB anulan el término de borde, y de ahí salen valores propios reales y funciones propias ortogonales.
- El teorema espectral da infinitos valores propios simples y una **base ortogonal** de $L_w^2(a, b)$.
- El cociente de **Rayleigh** entrega el signo de los λ_n sin resolver la ecuación.

Próxima clase

Sabemos que el desarrollo en funciones propias existe. Falta saber en qué sentido converge: es la teoría de las **series de Fourier**.

Gracias por su atención