

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 4

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

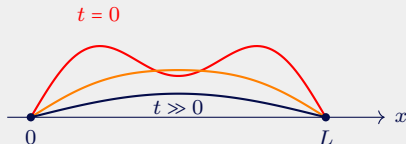
12 de agosto de 2026

§9. Separación de variables

El problema modelo

Una barra de largo L con temperatura inicial conocida, y cuyos extremos se mantienen a temperatura 0:

$$(E) \quad \begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} & \text{en } (0, L) \times \mathbb{R}^{>0}, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{para todo } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{para todo } x \in (0, L). \end{cases}$$



La estrategia será buscar **infinitas** soluciones sencillas de la EDP con las CB, y superponerlas para ajustar el dato inicial.

Separación de variables

Buscamos soluciones **no nulas** con las variables separadas, i.e., de la forma

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Sustituyendo en $u_t = \alpha u_{xx}$ y dividiendo por αXT :

$$X(x) T'(t) = \alpha X''(x) T(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha T(t)}.$$

El lado izquierdo no depende de t y el derecho no depende de x : al derivar la igualdad respecto de x se obtiene $(X''/X)' = 0$, luego ambos lados son una **constante**, que escribimos $-\lambda$:

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{y} \quad T' + \alpha \lambda T = 0.$$

Así, la EDP se transformó en **dos EDO** "acopladas" sólo por la constante λ , que por ahora es desconocida.

Las condiciones de borde pasan a X

Las CB están impuestas en puntos fijos del **espacio**, así que se traducen en condiciones sobre X : de $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ para todo t , y $T \not\equiv 0$, se sigue $X(0) = 0$. Similar para $x = L$.

Problema de valores propios

Encontrar los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$X'' + \lambda X = 0 \text{ en } (0, L), \quad X(0) = X(L) = 0$$

tiene soluciones $X \not\equiv 0$. Tales λ se llaman **valores propios**, y las X correspondientes, **funciones propias**.

La condición **inicial**, en cambio, no se traduce: $u(x,0) = X(x)T(0) = g(x)$ obligaría a que g fuera proporcional a X (y g puede no ser función propia).

Los casos $\lambda < 0$ y $\lambda = 0$

La ecuación característica de $X'' + \lambda X = 0$ es $m^2 = -\lambda$, y la forma de la solución general depende del signo de λ .

Caso $\lambda < 0$. Con $\mu := \sqrt{-\lambda} > 0$ se tiene $X = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$, y las CB dan

$$A + B = 0, \quad Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} = 0,$$

sistema cuyo determinante es $e^{-\mu L} - e^{\mu L} \neq 0$, pues $\mu L \neq 0$. Luego $A = B = 0$.

Caso $\lambda = 0$. Ahora $X = A + Bx$, y las CB dan $A = 0$ y $A + BL = 0$, luego $A = B = 0$.

No hay valores propios ≤ 0 . Hay además una razón física: con $\lambda \leq 0$ la ecuación $T' = -\alpha\lambda T$ daría temperaturas **constantes** o **crecientes** en el tiempo, incompatible con el hecho que los extremos que **enfrían**.

El caso $\lambda > 0$

Ahora $m = \pm i\sqrt{\lambda}$, y la solución general es

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

De $X(0) = 0$ se obtiene $A = 0$. De $X(L) = 0$, y buscando $B \neq 0$:

$$B \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\lambda}L = n\pi \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Valores y funciones propias (Dirichlet en $(0, L)$)

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Hay entonces una sucesión **infinita** de valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow +\infty$, cada uno con su función propia, única salvo constante multiplicativa.

Ejercicio Repetir el análisis con las CB mixtas $X(0) = 0$, $X'(L) = 0$.

Indicación: la segunda condición involucra un coseno.

La ecuación en T

Para cada valor propio λ_n , la ecuación temporal es lineal de primer orden:

$$T' = -\alpha\lambda_n T \quad \Longrightarrow \quad T_n(t) = e^{-\alpha(\frac{n\pi}{L})^2 t} \quad (\text{salvo constante}).$$

Multiplicandolas obtenemos las **soluciones fundamentales** del problema:

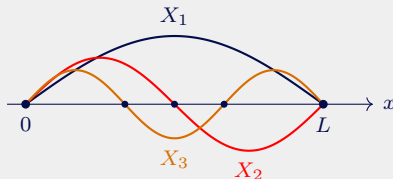
$$u_n(x, t) = e^{-\alpha(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \geq 1.$$

Son las funciones que verificamos a mano (ver Clase 1): cada u_n resuelve la EDP y las dos condiciones de borde, pero **no** la condición inicial.

Como $\lambda_n > 0$, cada modo **decae** exponencialmente. Más adelante veremos que el mismo análisis aplicado a la onda dará $T'' + c^2\lambda_n T = 0$, cuyas soluciones oscilan en vez de decaer.

§10. La solución en serie

Los modos propios



La función propia X_n tiene $n - 1$ ceros en el interior del intervalo, y le corresponde el factor temporal $e^{-\alpha\lambda_n t}$ con

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = n^2\lambda_1.$$

El modo n decae como $e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / L^2}$: el segundo armónico desaparece 4 veces más rápido que el primero, y el tercero 9 veces. La difusión borra primero lo que oscila rápido, y por eso el perfil se aplan.

Superposición

La EDP y las CB son lineales y homogéneas, así que toda combinación de soluciones fundamentales sigue siendo solución de ambas:

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n u_n(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Falta imponer la condición inicial. Evaluando en $t = 0$:

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Quedan dos preguntas por responder:

- 1 ¿Admite una g dada un desarrollo de esa forma? (Próxima semana)
- 2 Si lo admite, ¿cómo se calculan los coeficientes b_n ? (Hoy)

Ortogonalidad de las funciones propias

Lema

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ L/2 & \text{si } n = m, \end{cases} \quad n, m \geq 1.$$

Prueba: Usando $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$, para $n \neq m$ la integral vale

$$\frac{1}{2} \int_0^L \left[\cos\left(\frac{(n-m)\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi}{L}x\right) \right] dx = 0,$$

pues cada primitiva es un seno que se anula tanto en 0 como en L . Si $n = m$, el primer coseno vale 1 y la integral da $L/2$. $\square$

Decimos que $\{X_n\}_{n \geq 1}$ es una **familia ortogonal** en $(0, L)$: el producto

$$\langle f, h \rangle := \int_0^L f(x) h(x) dx$$

juega el rol del producto punto de $\mathbb{R}^n$.

Cálculo de los coeficientes

Supongamos que $g = \sum_{n \geq 1} b_n X_n$ y que la serie se puede integrar término a término. Multiplicando por X_m e integrando en $(0, L)$, la ortogonalidad elimina todos los términos salvo uno:

$$\langle g, X_m \rangle = \sum_{n \geq 1} b_n \underbrace{\langle X_n, X_m \rangle}_{= 0 \text{ salvo } n=m} = b_m \cdot \frac{L}{2}.$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Cada coeficiente se calcula **por separado**: son las coordenadas de g en una base ortogonal, igual que en $\mathbb{R}^n$.

La solución del problema

Solución del problema de Dirichlet para el calor

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx.$$

Queda por justificar que toda g razonable admite el desarrollo, y en qué sentido converge la serie (Próxima semana).

Observación: el intercambio de $\sum$ con $\int$ y con las derivadas vale para $t > 0$: como

$$|b_n| \leq \frac{2}{L} \int_0^L |g| \quad \text{y} \quad e^{-\alpha \lambda_n t} = e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / L^2},$$

la serie y sus derivadas convergen uniformemente en $x \in [0, L]$, $t \geq t_0 > 0$.

En particular u es de clase C^∞ para $t > 0$ aunque g tenga esquinas (**efecto regularizante** de la Ecuación de calor).

Unicidad (método de la energía)

Independientemente de las series, la solución de (E) es única. Sea u solución con $g \equiv 0$ y definamos

$$E(t) := \int_0^L u(x,t)^2 dx \geq 0, \quad E(0) = 0.$$

Derivando bajo la integral, usando la EDP e integrando por partes:

$$E'(t) = 2 \int_0^L u u_t dx = 2\alpha \int_0^L u u_{xx} dx = 2\alpha \underbrace{[u u_x]_0^L}_{=0} - 2\alpha \int_0^L u_x^2 dx \leq 0,$$

donde el corchete se anula porque $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

Luego E es decreciente, $E(0) = 0$ y $E \geq 0$, de donde $E \equiv 0$ y por lo tanto $u \equiv 0$. □

Aplicado a la diferencia de dos soluciones con los mismos datos, esto da la **unicidad**. Notar que $E' \leq 0$ dice además que la “energía” $\int u^2$ nunca crece.

§11. Ejemplos

Ejemplo: el dato ya es suma de modos

Sea $g(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$. Por la ortogonalidad los coeficientes son únicos, así que no hay ninguna integral que calcular:

$$b_1 = 3, \quad b_3 = -1, \quad b_n = 0 \text{ en los demás casos,}$$

y la solución es la suma **finita**

$$u(x, t) = 3e^{-\alpha\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) - e^{-9\alpha\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right).$$

El segundo término desaparece 9 veces más rápido que el primero: al poco tiempo u es indistinguible del primer modo puro, amplificado por 3.

Ejercicio ¿En qué tiempo t^* la amplitud del segundo término cae al 1% de la del primero?

Indicación: Convencerse que se debe resolver $e^{-8\alpha\pi^2 t/L^2} = \frac{1}{300}$.

Ejemplo: temperatura inicial constante

Una barra a temperatura uniforme $u_0 > 0$ cuyos extremos se enfrían bruscamente a 0, i.e., $g \equiv u_0$. Aquí sí hay que integrar:

$$b_n = \frac{2u_0}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2u_0}{L} \cdot \frac{L}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \frac{2u_0}{n\pi} [1 - (-1)^n],$$

es decir, $b_n = 0$ si n es par y $b_n = \frac{4u_0}{n\pi}$ si n es impar:

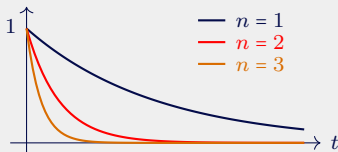
$$u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k+1} e^{-\alpha \left(\frac{(2k+1)\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right).$$

El dato es incompatible con las CB en las esquinas: $g(0) = u_0 \neq 0$. En $t = 0$ la serie converge a u_0 en el interior, pero a 0 en los extremos. Volveremos sobre este fenómeno al estudiar la convergencia de las series de Fourier.

El tiempo característico τ

Para t grande sólo sobrevive el primer término, $u \approx b_1 e^{-t/\tau} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$, con

$$\tau = \frac{L^2}{\alpha \pi^2}.$$



- ❶ τ crece como L^2 : duplicar el largo **cuadruplica** el tiempo de enfriamiento. Esto es importante en procesos difusivos.
- ❷ τ es inversamente proporcional a $\alpha = k/(c\rho)$: los buenos conductores olvidan rápido su temperatura inicial.

La barra aislada

Con los extremos **aislados** no hay flujo por ellos, i.e., $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$. Las CB se traducen a $X'(0) = X'(L) = 0$, y el análisis de signos cambia en caso:

- 1 $\lambda < 0$: de nuevo sólo queda $X \equiv 0$.
- 2 $\lambda = 0$ ahora **sí es valor propio**: $X = A + Bx$ con $X' \equiv B = 0$ deja $X_0 \equiv 1$ como función propia admisible.
- 3 $\lambda > 0$: de $X'(0) = 0$ sobrevive el coseno, y $X'(L) = 0$ impone $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Luego $u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\alpha \lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, y cuando $t \rightarrow +\infty$:

$$u(x, t) \longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) dx.$$

La barra aislada no se enfría, sino que **promedia** su temperatura inicial.

- 1 Resolver (E) con $g(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right)$, y decidir cuál de los dos modos domina para t grande.
- 2 Calcular los coeficientes b_n para $g(x) = x(L-x)$ y escribir la solución.
- 3 Resolver el problema con CB mixtas $u(0,t) = 0$, $u_x(L,t) = 0$, verificando que ahora $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$.
- 4 Barra con extremos a temperaturas constantes A y B : homogeneizar restando la ecuación de una recta (ver Clase 2) y resolver. ¿A qué perfil tiende u cuando $t \rightarrow +\infty$?

Hoy

- Buscar $u = X(x)T(t)$ transforma la EDP en **dos EDO** acopladas por λ , y las CB producen un **problema de valores propios** para X .
- Con Dirichlet: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ y $X_n = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$; con Neumann, cosenos y también se debe considerar $\lambda_0 = 0$.
- La **ortogonalidad** de las X_n da cada coeficiente $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g X_n dx$.
- El modo n decae como $e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / L^2}$.

Próxima clase

La propiedad clave fue la ortogonalidad de las funciones propias. Los **problemas de Sturm–Liouville** generalizan esta idea.

Gracias por su atención