

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 3

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

10 de agosto de 2026

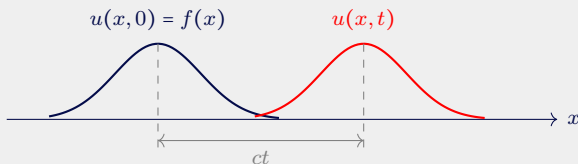
§6. La ecuación de transporte

La ecuación de transporte

Un río fluye con velocidad constante $c > 0$ en la dirección $+x$. Vertimos un colorante y llamamos $u(x, t)$ a su concentración. Si el colorante sólo es arrastrado por la corriente (no difunde), entonces¹:

Ecuación de transporte

$$u_t + c u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$



Es la EDP **más simple posible**: orden 1, lineal y homogénea. La física sugiere que el perfil inicial se traslada rígidamente a velocidad c , sin deformarse.

¹Haciendo un balance del estilo de la Clase 1 con flujo $\mathbf{q} = cu$.

El método de las características

En lugar de adivinar la solución, buscamos curvas del plano (x, t) a lo largo de las cuales la EDP se convierta en una EDO:

Sea $x(s)$ una curva **por determinar**, y evaluemos u sobre ella:

$$g(s) := u(x(s), s) \quad \implies \quad g'(s) = u_x(x(s), s) x'(s) + u_t(x(s), s).$$

Si **elegimos** $x'(s) = c$, entonces $g'(s) = c u_x + u_t = 0$ por la ecuación, y:

u es constante a lo largo de cada recta $x(s) = x_0 + cs$.

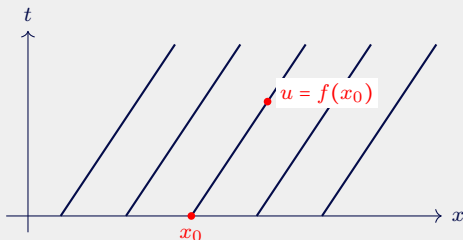
Estas rectas son las **curvas características** de la ecuación. Como $g(0) = u(x_0, 0) = f(x_0)$, se tiene $u(x_0 + cs, s) = f(x_0)$ para todo s . Luego, si $x := x_0 + ct$ (i.e., $x_0 = x - ct$):

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

El argumento además muestra que es la **única solución**: el valor de u en (x, t) queda forzado por la condición inicial en $x_0 = x - ct$.

Las curvas características

Las características son las rectas $x - ct = \text{cte}$ del plano (x, t) , de pendiente $1/c$. Sobre cada curva característica la solución *no cambia*.



Ejemplo. La solución de $u_t + 3u_x = 0$ con $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$ es

$$u(x, t) = \frac{1}{1 + (x - 3t)^2}$$

el perfil inicial se traslada a velocidad 3, sin cambiar de forma.

Ejercicio Resolver $u_t + cu_x = -\lambda u$ con $u(x, 0) = f(x)$, y $\lambda \in \mathbb{R}$ constante.

Indicación: Escribir la EDO que satisface $g(s) = u(x_0 + cs, s)$.

§7. La ecuación de onda en $\mathbb{R}$

Factorización del operador de onda

La ecuación de onda es de segundo orden, pero su operador se factoriza como producto de dos operadores de transporte:

$$\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx} = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x).$$

En efecto, aplicando el lado derecho a u de clase $\mathcal{C}^2$,

$$(\partial_t - c \partial_x)(u_t + c u_x) = u_{tt} + c u_{xt} - c u_{tx} - c^2 u_{xx} = u_{tt} - c^2 u_{xx},$$

donde usamos $u_{xt} = u_{tx}$ (Teorema de Schwarz).

Los dos factores son operadores de transporte, con velocidades $+c$ y $-c$. Resolver la onda se reduce entonces a resolver **dos transportes**.

Solución general

Sea u solución de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ y llamemos $w := u_t + c u_x$. Por la factorización,

$$w_t - c w_x = 0 \quad (\text{transporte con velocidad } -c),$$

Luego $w(x, t) = P(x + ct)$ con P arbitraria.

Falta resolver $u_t + c u_x = P(x + ct)$. Buscamos una **solución particular** de la forma $u = Q(x + ct)$:

$$u_t + c u_x = c Q'(x + ct) + c Q'(x + ct) = 2c Q'(x + ct),$$

así que basta tomar Q con $Q' = P/(2c)$. Sumando la **solución general** del transporte **homogéneo**, $F(x - ct)$:

Solución general de la ecuación de onda

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct), \quad F, G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \text{ arbitrarias.}$$

Toda solución es la superposición de dos perfiles que viajan en sentidos opuestos con rapidez c , sin deformarse.

Alternativa: Forma canónica

Las características de los dos factores sugieren usar como nuevas variables

$$\xi := x + ct, \quad \eta := x - ct.$$

Por la regla de la cadena, $\partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta$ y $\partial_t = c\partial_\xi - c\partial_\eta$, luego

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \quad u_{tt} = c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}),$$

y por lo tanto

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{\xi\eta}.$$

Forma canónica

La ecuación de onda es equivalente a $u_{\xi\eta} = 0$, cuya solución general es $u = F(\eta) + G(\xi)$ (ver Clase 1), es decir, $u = F(x - ct) + G(x + ct)$.

Toda EDP hiperbólica de 2^{do} orden se puede llevar a esta forma con un cambio de variables adecuado, dado por sus características.

§8. La fórmula de d'Alembert

El problema de Cauchy

La solución general tiene dos funciones libres, así que necesitamos dos datos: **posición inicial** y **velocidad inicial**.

$$(C) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Imponemos ambas condiciones a $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. Como $u_t = -cF'(x - ct) + cG'(x + ct)$:

$$F(x) + G(x) = \varphi(x), \quad -cF'(x) + cG'(x) = \psi(x).$$

Integrando la segunda igualdad entre 0 y x ,

$$G(x) - F(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) \, ds + K, \quad K := G(0) - F(0).$$

Sumando y restando con la primera:

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) \, ds - \frac{K}{2}, \quad G(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) \, ds + \frac{K}{2}.$$

La fórmula de d'Alembert

Evaluando F en $x-ct$, G en $x+ct$ y sumando, las constantes K se cancelan:

Teorema (d'Alembert, 1747)

Si $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ y $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, el problema de Cauchy (C) tiene una única solución, dada por

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

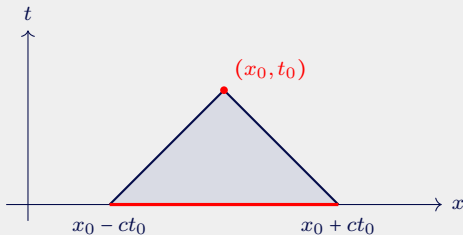
Verificación: En $t = 0$ la integral tiene límites iguales, luego $u(x, 0) = \varphi(x)$.
Derivando respecto de t (regla de Leibniz),

$$u_t(x, t) = \frac{c}{2} [\varphi'(x+ct) - \varphi'(x-ct)] + \frac{1}{2} [\psi(x+ct) + \psi(x-ct)],$$

y evaluando en $t = 0$ se obtiene $u_t(x, 0) = \psi(x)$. □

Dominio de dependencia

La fórmula dice de qué datos depende u en un punto (x_0, t_0) : de φ en los dos extremos $x_0 \pm ct_0$, y de ψ en todo el intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$.



La información viaja con **velocidad finita** c : modificar los datos fuera de ese intervalo no cambia el valor de $u(x_0, t_0)$, y el dato en un punto x_0 sólo influye sobre el cono $|x - x_0| \leq ct$.

Compárese con el calor: el núcleo $H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-x^2/(4\alpha t)} > 0$ para todo x (una fuente de calor localizada se siente instantáneamente en toda la barra).

Ejemplo: cuerda pulsada

Una cuerda se levanta y se suelta desde el reposo: $\varphi(x) = e^{-x^2}$ y $\psi \equiv 0$. Como el término integral se anula,

$$u(x, t) = \frac{e^{-(x-ct)^2} + e^{-(x+ct)^2}}{2}.$$

El pulso inicial se parte en **dos mitades** de amplitud $\frac{1}{2}$ que viajan en sentidos opuestos.



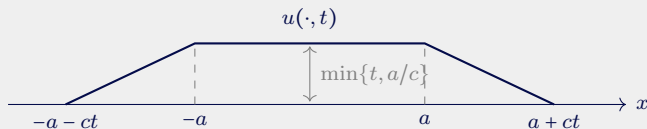
Después de un tiempo, cada punto fijo de la cuerda vuelve al reposo: las dos mitades se alejan y la perturbación abandona cualquier región acotada. Esto es propio de la dimensión impar.

Ejemplo: cuerda golpeada

Tocando un piano se golpea una cuerda en reposo² $\varphi \equiv 0$ y $\psi = \chi_{[-a,a]}$.
Ahora

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \chi_{[-a,a]}(s) ds = \frac{1}{2c} \text{long}([x-ct, x+ct] \cap [-a, a]),$$

que es una función continua y lineal a trozos, con forma de trapecio que se ensancha.



En particular $u(0, t) = \min\{t, a/c\}$: el punto central sube y **se queda arriba**.
Una cuerda golpeada **no vuelve** a su posición inicial.

²**Función indicatriz:** $\chi_{[-a,a]}(x) = 0$ (resp. $= 1$) si $x \notin [-a, a]$ (resp. $x \in [-a, a]$).

Propiedades de la solución

- ❶ **No hay ganancia ni pérdida de regularidad.** La solución es tan regular como el dato: si φ tiene una esquina en x_0 , entonces u la tiene sobre las dos características que salen de x_0 , para todo t . El calor, en cambio, vuelve C^∞ cualquier dato inicial de inmediato.
- ❷ **Reversibilidad.** La fórmula tiene sentido para $t < 0$ y define una solución. Conociendo el estado presente se puede reconstruir el pasado, cosa imposible para el calor.
- ❸ **Soluciones débiles.** La fórmula sigue teniendo sentido si φ es sólo continua o si ψ es integrable (el ejemplo anterior), aunque entonces u no sea de clase C^2 y no resuelva la EDP en el "sentido clásico".

Cultura general

En $\mathbb{R}^3$ (dimensión impar) la fórmula análoga involucra promedios sobre *esferas*: una perturbación localizada produce una señal nítida que pasa y se acaba. Es la razón por la que oímos y vemos con nitidez.

El problema de Cauchy está bien planteado

De acuerdo a la definición de Hadamard de la clase pasada. Se tiene:

- ❶ **Existencia:** la fórmula de d'Alembert entrega una solución explícita.
- ❷ **Unicidad:** si u_1, u_2 resuelven (C) con los mismos datos, entonces $u := u_1 - u_2$ resuelve (C) con $\varphi = \psi = 0$, y la fórmula da $u \equiv 0$.
- ❸ **Estabilidad:** si u_1, u_2 corresponden a datos (φ_1, ψ_1) y (φ_2, ψ_2) , acotando cada término de la fórmula se obtiene, para $0 \leq t \leq T$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_1 - \varphi_2| + T \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1 - \psi_2|.$$

¿Y si la cuerda tiene extremos?

Consideremos la semi-recta $x > 0$ con el extremo fijo, $u(0, t) = 0$. La idea es **extender los datos de manera impar** a todo $\mathbb{R}$:

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \geq 0, \\ -\varphi(-x) & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad \text{e igual para } \psi.$$

Si $\tilde{u}$ es la solución de d'Alembert con datos $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$, entonces $\tilde{u}(\cdot, t)$ es impar para todo t (**ejercicio**), luego $\tilde{u}(0, t) = 0$ y su restricción a $x > 0$ resuelve el problema.

Concretamente, para $x < ct$ la fórmula queda

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(s) \, ds :$$

la onda **se refleja** en el extremo y vuelve invertida.

La cuerda con dos extremos

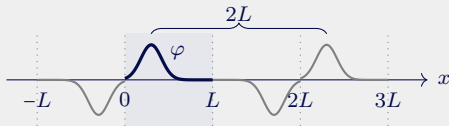
Ahora hay que anular u en *los dos* extremos, y cada uno impone su simetría:

$$\tilde{\varphi}(-x) = -\tilde{\varphi}(x) \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}(2L - x) = -\tilde{\varphi}(x).$$

Al componer las dos reflexiones los signos se cancelan y queda una **traslación**:

$$\tilde{\varphi}(x + 2L) = -\tilde{\varphi}(-x) = \tilde{\varphi}(x),$$

i.e., $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\psi}$ son las extensiones **impares y $2L$ -periódicas**:



Así, d'Alembert resuelve el problema y la cuerda repite su movimiento con período $2L/c$. Pero para t grande hay que rastrear en qué copia cae $x \pm ct$, y para el **calor** en $[0, L]$ no existe un análogo. En lugar de una fórmula, construiremos **infinitas** soluciones sencillas y las superpondremos.

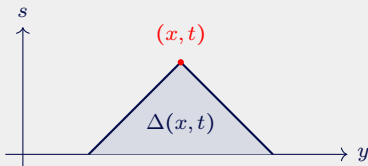
La onda con fuente externa

Para la ecuación no homogénea con datos iniciales nulos,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0,$$

sea $\Delta(x, t) := \{(y, s) : 0 \leq s \leq t, |y - x| \leq c(t - s)\}$ el **triángulo característico** del punto (x, t) . En las variables $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ la ecuación es $u_{\xi\eta} = -\frac{1}{4c^2}F$, y al integrarla dos veces (y deshacer el cambio de variable):

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \iint_{\Delta(x, t)} F(y, s) \, dy \, ds.$$



Lo anterior, junto con la fórmula de d'Alembert, permite resolver el problema con datos y fuente arbitrarios.

- 1 Resolver por características $u_t + x u_x = 0$ con $u(x, 0) = f(x)$.
(Indicación: ahora $x'(s) = x(s)$.) ¿Son rectas las características?
- 2 Resolver $u_{tt} = 4u_{xx}$ en $\mathbb{R}$ con $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $\psi(x) = 0$, y con $\varphi(x) = 0$ y $\psi(x) = \cos(x)$.
- 3 Probar que si φ y ψ son impares, entonces la solución de d'Alembert cumple $u(0, t) = 0$ para todo t . ¿Qué ocurre si ambas son pares?
- 4 Deducir la fórmula de d'Alembert integrando directamente $u_{\xi\eta} = 0$ en las variables $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, e imponiendo después las condiciones iniciales.
- 5 Calcular la solución con fuente $F(x, t) = 1$ y datos nulos, evaluando la integral sobre $\Delta(x, t)$. Verificar el resultado en la EDP.

Hoy

- El **método de las características** convierte la EDP de transporte en una EDO sobre rectas, y da existencia y unicidad: $u(x, t) = f(x - ct)$.
- El operador de onda se factoriza en dos transportes, de donde $u = F(x - ct) + G(x + ct)$; el cambio $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ da la forma canónica $u_{\xi\eta} = 0$.
- La **fórmula de d'Alembert** resuelve el problema de Cauchy en $\mathbb{R}$, y muestra que la información viaja con velocidad finita c .

Próxima clase

Separación de variables para el calor en una barra $[0, L]$: buscaremos soluciones $u(x, t) = X(x)T(t)$, lo que transformará la EDP en dos EDO acopladas por una constante λ . Aparecerá el problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ con $X(0) = X(L) = 0$.

Gracias por su atención