

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 2

Pedro Montero

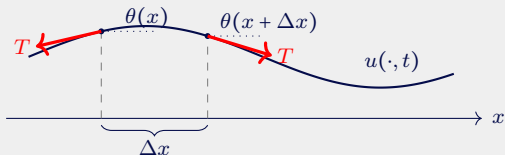
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

5 de agosto de 2026

§3. La ecuación de onda

La cuerda vibrante

Sea $u(x, t)$ el desplazamiento **vertical** del punto x de una cuerda tensa en el tiempo t . Aislamos el trozo entre x y $x + \Delta x$, y aplicamos la 2^{da} ley de Newton.



Aquí $\theta(x)$ es el ángulo que forma la cuerda con la horizontal en el punto x , es decir, la inclinación de la recta tangente al perfil $u(\cdot, t)$: $\tan \theta(x) = u_x(x, t)$.

Hipótesis

La cuerda es **flexible** (la tensión es tangente a la cuerda), tiene densidad lineal ρ constante, y las oscilaciones son **pequeñas**: $|u_x| \ll 1$. Luego

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx 1, \quad \sin \theta = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx u_x.$$

Balance horizontal

Sea $T(x, t)$ la *magnitud* de la tensión¹ en el punto x . Como la tensión es tangente a la cuerda, las fuerzas sobre los extremos del trozo son

$$T(x + \Delta x) (\cos \theta(x + \Delta x), \sin \theta(x + \Delta x)) \quad \text{y} \quad -T(x) (\cos \theta(x), \sin \theta(x)).$$

La cuerda no se mueve horizontalmente, luego:

$$T(x + \Delta x) \cos \theta(x + \Delta x) - T(x) \cos \theta(x) = 0 \quad \text{para todo } x, \Delta x,$$

es decir, $T \cos \theta$ no depende de x . Escribimos $T \cos \theta \equiv T_0$, y como $\cos \theta \approx 1$:

$$T(x, t) \approx T_0 \text{ constante.}$$

Esto simplifica la componente vertical: como $\sin \theta = \cos \theta \tan \theta$,

$$T \sin \theta = \underbrace{T \cos \theta}_{= T_0} \tan \theta = T_0 u_x.$$

¹La **tensión** en un punto es la fuerza que un trozo de la cuerda ejerce sobre el otro.

Balance vertical y paso al límite

La masa del trozo es $\int_x^{x+\Delta x} \rho \sqrt{1 + u_x^2} ds \approx \rho \Delta x$, y su aceleración vertical es u_{tt} . Por la 2^{da} ley de Newton,

$$\rho \Delta x u_{tt}(\bar{x}, t) = T_0 u_x(x + \Delta x, t) - T_0 u_x(x, t)$$

para algún $\bar{x} \in (x, x + \Delta x)$ (teorema del valor medio). Dividiendo por $\rho \Delta x$,

$$u_{tt}(\bar{x}, t) = \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x},$$

y haciendo $\Delta x \rightarrow 0$ (con lo que $\bar{x} \rightarrow x$), la derecha converge a:

Ecuación de onda unidimensional

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c := \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}.$$

Con una densidad de fuerza externa $F(x, t)$ (por ejemplo, gravedad), el mismo balance entrega la ecuación no homogénea $u_{tt} = c^2 u_{xx} + F/\rho$.

- ❶ **c es una velocidad.** $[T_0] = N = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ y $[\rho] = \text{kg}/\text{m}$, luego

$$[c] = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Más tensión da ondas más rápidas. Veremos que las frecuencias de una cuerda de largo L son $\omega_n = n\pi c/L$.

- ❷ **Amortiguamiento.** Con un roce proporcional a la velocidad se obtiene $u_{tt} + \gamma u_t = c^2 u_{xx}$. Si γ es grande, u_{tt} es despreciable frente a γu_t y la ecuación se parece a la del calor.
- ❸ **Validez.** Todo se basa en $|u_x| \ll 1$; para amplitudes grandes el modelo correcto es no lineal.

Ondas viajeras

Sea $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ arbitraria y $u(x, t) := F(x - ct)$. Escribiendo $\xi = x - ct$, la regla de la cadena da

$$\begin{aligned}u_x &= F'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} = F'(\xi), & u_{xx} &= F''(\xi), \\u_t &= F'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c F'(\xi), & u_{tt} &= c^2 F''(\xi),\end{aligned}$$

y por lo tanto $u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 F''(\xi) - c^2 F''(\xi) = 0$. ✓

El mismo cálculo con $\eta = x + ct$ muestra que $G(x + ct)$ es solución, y por superposición

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

es solución para todas $F, G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$: el perfil F viaja hacia la derecha y el perfil G hacia la izquierda, ambos con rapidez c y sin deformarse.

No se pide nada a F y G salvo ser de clase $\mathcal{C}^2$. En la próxima clase veremos que **toda** solución es de esta forma.

§4. Clasificación y problemas bien planteados

La parte principal de una EDP de 2^{do} orden

Ya discutimos el calor, onda y (como caso estacionario) Laplace. Consideremos la EDP lineal general de 2^{do} orden en dos variables:

$$\underbrace{a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy}}_{\text{parte principal}} + d u_x + e u_y + f u + g = 0.$$

La parte principal se escribe $\text{tr}(A D^2 u)$, con $D^2 u$ la matriz Hessiana de u y

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

simétrica. Si hacemos un cambio lineal de variables $(\xi, \eta) = P^{-1}(x, y)$, la regla de la cadena transforma A en ${}^t P A P$, y por Álgebra Lineal los signos de los valores propios de A no cambian.

Los términos de orden inferior sí cambian con el cambio de variables, y por eso no intervienen en la clasificación.

El discriminante

Como A es simétrica, sus valores propios λ_1, λ_2 son reales y son las raíces de

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right) = 0.$$

En particular su producto es

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = ac - \frac{b^2}{4} = -\frac{1}{4}(b^2 - 4ac),$$

y el signo de $\lambda_1 \lambda_2$ es *opuesto* al del **discriminante** $\mathcal{D} := b^2 - 4ac$.

Clasificación

- $\mathcal{D} < 0$: λ_1, λ_2 tienen el mismo signo y la EDP es **elíptica**.
- $\mathcal{D} = 0$: algún $\lambda_i = 0$ y la EDP es **parabólica**.
- $\mathcal{D} > 0$: λ_1, λ_2 tienen signos opuestos y la EDP es **hiperbólica**.

Los nombres vienen de las cónicas: $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ es una elipse, una parábola o una hipérbola según el signo de $\mathcal{D}$.

Las tres ecuaciones clásicas

- ❶ **Laplace** $u_{xx} + u_{yy} = 0$: aquí $a = c = 1$, $b = 0$ y $\mathcal{D} = -4 < 0$, **elíptica**.
- ❷ **Calor** $\alpha u_{xx} - u_t = 0$ (variables x, t): aquí $a = \alpha$, $b = c = 0$ y $\mathcal{D} = 0$, **parabólica**.
- ❸ **Onda** $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$: el coeficiente de u_{tt} es 1, el de u_{xx} es $-c^2$ y $b = 0$, luego $\mathcal{D} = 4c^2 > 0$, **hiperbólica**.

Cultura general

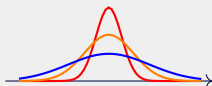
El tipo puede cambiar de punto a punto. La **ecuación de Tricomi**

$$u_{xx} + x u_{yy} = 0 \quad \text{tiene} \quad \mathcal{D} = -4x,$$

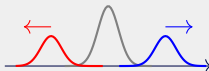
luego es elíptica si $x > 0$, parabólica si $x = 0$ e hiperbólica si $x < 0$. Modela flujo transónico, y la recta $x = 0$ corresponde a la barrera del sonido.

Ejercicio Clasificar $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$ y $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x = 0$.

Comparación de los tres tipos



Parabólica



Hiperbólica



Elíptica

	Parabólica	Hiperbólica	Elíptica
Modelo	calor	onda	Laplace
Ecuación modelo	$u_t = \alpha \Delta u$	$u_{tt} = c^2 \Delta u$	$\Delta u = 0$
Tiempo	irreversible	reversible	no hay
Velocidad de la info.	infinita	finita ($= c$)	—
Regularidad	suaviza al instante	conserva esquinas	analítica
Energía	decae	se conserva	mínima
Datos	1 CI + CB	2 CI + CB	sólo CB

Problemas bien planteados

Una EDP por sí sola tiene infinitas soluciones, y con condiciones de más no tiene ninguna. El criterio para decidir cuándo un problema está bien formulado es el siguiente.

Definición (Hadamard, 1902)

Un problema de EDP está **bien planteado** si:

- 1 **Existencia:** existe al menos una solución.
- 2 **Unicidad:** existe a lo más una solución.
- 3 **Estabilidad:** la solución depende continuamente de los datos.

La tercera condición pide que si u_1 y u_2 son las soluciones asociadas a los datos g_1 y g_2 , entonces

$$\|g_1 - g_2\| \text{ pequeño} \implies \|u_1 - u_2\| \text{ pequeño.}$$

Los datos de un problema concreto provienen de mediciones, y toda medición tiene error (EDP estables son cercanas a la realidad).

El ejemplo de Hadamard

Sea $M \in \mathbb{N}$. Consideremos la ecuación siguiente:

$$(E_M) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{tt} = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \frac{1}{M} \sin(Mx) & \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución. Sea $u_M(x, t) := \frac{1}{M^2} \sin(Mx) \sinh(Mt)$. Derivando,

$$(u_M)_{xx} = -\sin(Mx) \sinh(Mt), \quad (u_M)_{tt} = \sin(Mx) \sinh(Mt),$$

de donde $\Delta u_M = 0$. Además $u_M(x, 0) = 0$ pues $\sinh(0) = 0$, y como $(u_M)_t = \frac{1}{M} \sin(Mx) \cosh(Mt)$, en $t = 0$ se obtiene $\frac{1}{M} \sin(Mx)$. $\square$

Comparemos el tamaño del dato con el de la solución cuando $M \rightarrow +\infty$:

- El dato tiende a cero: $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{M} \sin(Mx) \right| = \frac{1}{M} \rightarrow 0$, y con dato nulo la solución es $u \equiv 0$.
- La solución explota: $|u_M(x, t)| \sim \frac{e^{Mt}}{2M^2} \rightarrow +\infty$ para cada $t > 0$ fijo.

Qué condiciones admite cada tipo

La EDP anterior no está mal planteada por culpa de Laplace, sino de las condiciones: para $u_{tt} = u_{xx}$ (onda) los mismos datos dan un problema bien planteado (próxima clase). **El tipo de la EDP determina qué condiciones son admisibles.**

Ecuación	Condiciones	Problema
$u_t = \alpha \Delta u$	$u(\cdot, 0) = u_0$ + CB en $\partial\Omega$	Cauchy–Dirichlet/Neumann
$u_{tt} = c^2 \Delta u$	$u(\cdot, 0) = \varphi, u_t(\cdot, 0) = \psi$ + CB	Cauchy–Dirichlet/Neumann
$\Delta u = f$	sólo CB en $\partial\Omega$	Dirichlet, Neumann o Robin

- 1 El número de condiciones iniciales es el orden de la derivada temporal: una para el calor, dos para la onda, ninguna para Laplace.
- 2 Para Neumann puro la solución es única **salvo constante**, y el dato debe cumplir una condición de compatibilidad (más adelante).

§5. Problemas lineales

El problema lineal general

Todas nuestras EDP se escriben $L(u) = f$ con L un operador lineal:

$$L(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij} u + \sum_i a_i \partial_i u + a_0 u, \quad L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v).$$

Las condiciones de borde también: Dirichlet, Neumann y Robin son todas de la forma $B(u) = b_1 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + b_0 u$, con B lineal. El **problema lineal general** es entonces

$$(P) \quad \begin{cases} L(u) = f & \text{en } \Omega, \\ B_k(u) = g_k & \text{sobre } \Lambda_k \subseteq \partial\Omega, \quad k = 1, \dots, K. \end{cases}$$

La separación de variables resuelve (P) únicamente cuando $f \equiv 0$ y todos los g_k son nulos salvo uno. Lo que sigue reduce cualquier (P) a ese caso.

Homogeneización de la EDP

Supongamos que conocemos una solución particular $\bar{u}$ de la EDP, es decir $L(\bar{u}) = f$ en Ω , sin pedirle nada en el borde. Entonces $v := u - \bar{u}$ satisface, por linealidad,

$$\begin{cases} L(v) = L(u) - L(\bar{u}) = f - f = 0 & \text{en } \Omega, \\ B_k(v) = g_k - B_k(\bar{u}) & \text{sobre } \Lambda_k. \end{cases}$$

Ejemplo. Para $u_t - u_{xx} = \sin(\pi x)$ en $(0, 1)$, la función $\bar{u}(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x)$ cumple

$$\bar{u}_t - \bar{u}_{xx} = 0 - \left(-\frac{\pi^2}{\pi^2} \sin(\pi x) \right) = \sin(\pi x),$$

luego $v = u - \bar{u}$ cumple $v_t = v_{xx}$, y sólo cambia el dato inicial y de borde.

En los problemas no homogéneos con fuente ("lado derecho") dependiente del tiempo este truco ya no basta, y habrá que usar funciones propias.

Homogeneización de una condición de borde

Si conocemos G con $B_1(G) = g_1$ sobre Λ_1 , entonces $v := u - G$ satisface

$$\begin{cases} L(v) = f - L(G) & \text{en } \Omega, \\ B_1(v) = 0, \quad B_k(v) = g_k - B_k(G) & \text{sobre } \Lambda_1, \Lambda_k \ (k \geq 2). \end{cases}$$

Ejemplo. Sea la barra con extremos a temperaturas constantes A y B :

$$u_t = \alpha u_{xx} \text{ en } (0, L), \quad u(0, t) = A, \quad u(L, t) = B, \quad u(x, 0) = g(x).$$

La elección más simple de G con $G(0) = A$ y $G(L) = B$ es la recta $G(x) = A + \frac{B-A}{L}x$, que además cumple $G'' = 0$ y no depende de t , luego $L(G) = G_t - \alpha G_{xx} = 0$ y la EDP no cambia. Así, $v := u - G$ resuelve

$$v_t = \alpha v_{xx}, \quad v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad v(x, 0) = g(x) - G(x).$$

Homogeneizar el borde cambia la EDP (aparece $-L(G)$) y viceversa. Siempre que se pueda, hay que elegir G con $L(G) = 0$.

Desacoplamiento

Sea u_0 solución del problema con fuente f y todos los datos de borde nulos, y sea u_i solución del problema con EDP homogénea y un único dato de borde g_i "activo". Por linealidad,

$$L\left(\sum_{i=0}^K u_i\right) = f, \quad B_k\left(\sum_{i=0}^K u_i\right) = g_k \quad \text{sobre } \Lambda_k,$$

es decir, $u = u_0 + u_1 + \cdots + u_K$ resuelve (P) .

The diagram shows the decomposition of a Laplace problem on a rectangle. On the left, a rectangle is labeled with boundary conditions g_1 (top), g_2 (right), g_3 (bottom), and g_4 (left). Inside the rectangle, the equation $\Delta u = 0$ is written. This is followed by an equals sign and a sum of three rectangles. The first rectangle in the sum has g_1 on the top boundary and 0 on the other three boundaries. The second rectangle has 0 on the top and bottom boundaries, and g_2 on the right boundary. The third rectangle has 0 on the top, bottom, and left boundaries, and g_3 on the right boundary. The sum is followed by a plus sign and an ellipsis, indicating further terms in the series.

Usaremos esto para resolver la ecuación de Laplace en un rectángulo con datos en los cuatro lados.

Ejercicios

- ❶ Clasificar, indicando la región del plano cuando el tipo cambie:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0, \quad u_{xx} - x^2 u_{yy} + u_y = 0, \quad u_{xx} + 2u_{xy} + (1-y)u_{yy} = 0.$$

- ❷ Sea u solución de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ en $(0, L)$ con $u(0, t) = u(L, t) = 0$.
Probar que la energía

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx$$

es constante, derivando bajo la integral e integrando por partes.
Deducir que el problema tiene a lo más una solución.

- ❸ Dibujar el perfil de $u(x, t) = e^{-(x-t)^2} + \sin(x+t)$ para $t = 0$ y $t = 1$, y verificar que resuelve $u_{tt} = u_{xx}$.
- ❹ Para $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ en $(0, L)$ con $u(0, t) = A$ y $u(L, t) = B$ constantes, encontrar G que homogeneice ambas condiciones de borde sin cambiar la EDP.

Hoy

- La ecuación de onda sale de aplicar la 2^{da} ley de Newton a un trozo de cuerda, con el mismo método de la clase pasada.
- El discriminante $\mathcal{D} = b^2 - 4ac$ separa EDP elípticas, parabólicas e hiperbólicas, y el tipo determina qué condiciones son admisibles.
- Homogeneizar y desacoplar reducen cualquier problema lineal a varios con un único dato no nulo.

Próxima clase

Ondas en $\mathbb{R}$: la factorización $\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx} = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x)$, las curvas características y la **fórmula de d'Alembert**.

Resolveremos la ecuación de onda de manera explícita, y veremos por qué la presencia de bordes obliga a cambiar de método.

Gracias por su atención