

Cálculo Avanzado para Ingeniería

MAT70625 – Clase 1

Pedro Montero

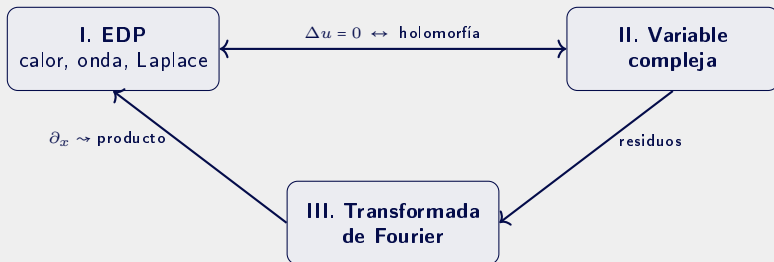
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

3 de agosto de 2026

§0. Presentación del curso

Un curso, tres lenguajes

Este curso reúne tres teorías que nacieron por separado en el siglo XIX y que hoy son parte de **una caja de herramientas** para modelar fenómenos continuos:



La idea clave

Un problema a priori *difícil* (una EDP, una integral real impropia) se vuelve *fácil* al reinterpretarlo: separar variables, pasar al plano complejo, o pasar al dominio de frecuencias.

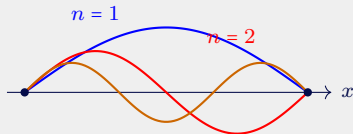
Unidad I: Ecuaciones en Derivadas Parciales

Casi toda la física del continuo se escribe con **derivadas parciales**: la incógnita u depende del espacio y del tiempo.



Difusión del calor: $u_t = \alpha \Delta u$

El perfil de temperatura *se aplana*.



Cuerda vibrante: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

La cuerda vibra en *modos propios*.

Si $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función dos veces derivable, se define su **laplaciano** como

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Unidad I: ¿qué aprenderemos?

El método central será la **separación de variables**: buscar soluciones

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

y transformar así una EDP en **dos EDO acopladas por una constante λ** .

Temas principales de la Unidad I

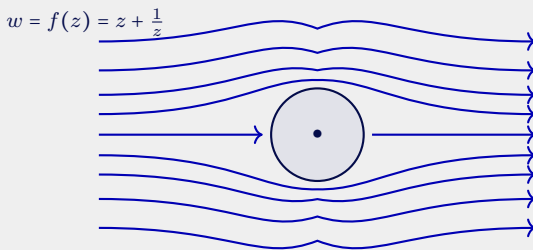
- 1 Deducción y clasificación de las EDP clásicas.
- 2 **Sturm–Liouville**: valores propios λ_n y funciones propias X_n .
- 3 **Series de Fourier**: escribir el dato inicial en la base $\{X_n\}$.
- 4 Problemas homogéneos y no homogéneos: calor, onda y potenciales.

Ejemplo

La cuerda de guitarra modelada por la ecuación de onda: los λ_n son las *frecuencias* y las X_n los *armónicos*.

Unidad II: Funciones de variable compleja

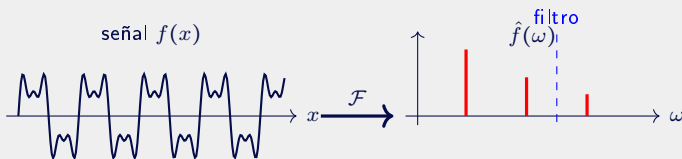
Una función **holomorfa** $f = u + iv$ satisface Cauchy–Riemann, y entonces u y v son **armónicas**: $\Delta u = \Delta v = 0$. Así, todo flujo plano incompresible e irrotacional *equivale* a una función holomorfa.



Además, el **Teorema de los residuos** calcula integrales reales que ningún método de Cálculo Integral clásico resuelve. Además, da un método para calcular la transformada inversa de Laplace (integrales de Bromwich).

Unidad III: Transformada de Fourier

Toda señal se descompone en frecuencias: $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$.



¿Por qué sirve para EDP?

La transformada convierte **derivar en multiplicar**:

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = 2\pi i \omega \hat{f}(\omega), \quad \mathcal{F}[f * g] = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Una EDP en x se vuelve una **EDO** en t para cada frecuencia ω . Así resolveremos el calor y la onda en $\mathbb{R}$ (dominios *no acotados*, donde no hay series de Fourier).

- **Profesor:** Pedro Montero Oficina F-250
- **Ayudante:** Madeline Castro
- Material y avisos por e-mail y en la página del curso.

Prerrequisitos que usaremos desde hoy

- **Varias Variables:** gradiente, divergencia, integrales de línea (y de superficie), **Teorema de Green**.
- **EDO Elementales:** EDO lineales de 2^{do} orden con coeficientes constantes, y series de Fourier.

Fechas importantes

- **2 Certámenes (75 %):** pruebas escritas de desarrollo.
Certamen 1: Sábado 26/09/2026 Certamen 2: Sábado 24/10/2026
- **4 Controles (25 %):** pruebas escritas breves de desarrollo.
Q1: 08/09/2026 Q2: 13/10/2026
Q3: 10/11/2026 Q4: 24/11/2026
- **Certamen Global:** *fecha por definir.*

Nota del semestre

$$NS = 0,75 \cdot (\text{Promedio Certámenes}) + 0,25 \cdot (\text{Promedio Controles})$$

Quien se inscriba en los plazos que se informarán podrá rendir el **Certamen Global**. Si lo rinde, la nota obtenida *en todo evento* reemplaza la peor nota de certamen y se recalcula NS.

§1. ¿Qué es una EDP?

Definición y notación

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Una **ecuación en derivadas parciales (EDP)** es una ecuación de la forma

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots) = 0, \quad x \in \Omega,$$

cuya incógnita es una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de **varias** variables. El **orden** de la EDP es el mayor orden de derivada que aparece.

Notación (para $n = 2$ o $n = 3$)

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$
$$\nabla u = (u_x, u_y, u_z), \quad \Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(\nabla u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Recordar que si $u \in \mathcal{C}^2$ entonces las derivadas mixtas conmutan: $u_{xy} = u_{yx}$ (Teorema de Schwarz). **Lo usaremos implícitamente todo el tiempo.**

La gran diferencia con las EDO

EDO trivial: $y'(x) = 0 \implies y(x) = C$, con $C \in \mathbb{R}$ *constante* arbitraria.

La EDP análoga: para $u = u(x, y)$,

$$u_x = 0 \implies u(x, y) = g(y), \quad g \text{ función arbitraria.}$$

De manera similar: $u_{xy} = 0 \Leftrightarrow (u_x)_y = 0 \Rightarrow u_x(x, y) = h(x)$ y, al integrar en x ,

$$u(x, y) = f(x) + g(y), \quad f, g \text{ arbitrarias.}$$

Moraleja

En una EDO lineal de orden n la solución general depende de n **constantes**; en una EDP depende de **funciones arbitrarias**. El espacio de soluciones de una EDP lineal homogénea es de **dimensión infinita**.

Así, para determinar *una* solución hace falta mucha más información: **condiciones iniciales** y **condiciones de borde**.

Vocabulario y las cuatro ecuaciones clásicas

Una EDP es **lineal** si u y sus derivadas aparecen linealmente (sin productos $u u_x$, potencias u^2 , etc.), y es **homogénea** si $u \equiv 0$ es solución.

Las que estudiaremos

- | | |
|--|-----------------------------|
| • Transporte: $u_t + c u_x = 0$ | orden 1, lineal, homogénea. |
| • Calor (difusión): $u_t = \alpha \Delta u$ | orden 2, lineal, homogénea. |
| • Onda: $u_{tt} = c^2 \Delta u$ | orden 2, lineal, homogénea. |
| • Laplace (potencial): $\Delta u = 0$ | orden 2, lineal, homogénea. |

La EDP $u_t + u u_x = 0$ (Burgers) es **no lineal**; $u_t = \alpha u_{xx} + \sin(x)$ es lineal **no homogénea**.

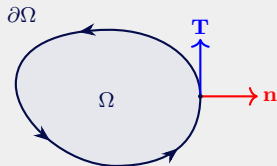
La linealidad permite el **principio de superposición**: si u_1, u_2 resuelven una EDP lineal homogénea, entonces $c_1 u_1 + c_2 u_2$ también. **Sin él, no podríamos usar series de Fourier.**

§2. ¿De dónde vienen las EDP?

Deducción de la ecuación del calor

Recordatorio: el Teorema de Green

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y acotado, con borde $\partial\Omega$ una curva simple, cerrada y regular a trozos, **orientada positivamente** (el dominio queda a la izquierda), y sea $\mathbf{F} = (P, Q)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto que contiene a $\overline{\Omega}$.



Teorema de Green

$$\oint_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dA.$$

Este teorema reaparecerá en la Unidad II: permite demostrar el Teorema de Cauchy–Goursat, y de ahí sale todo el cálculo de residuos.

Hoy lo usaremos en una segunda forma equivalente, adaptada a *flujos*:

Teorema de la divergencia en el plano

Si $\partial\Omega$ está parametrizada positivamente por $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, el vector tangente es $\mathbf{T} = (x'(s), y'(s))$ y la **normal exterior** es

$$\mathbf{n} = (y'(s), -x'(s)), \quad \text{es decir} \quad \mathbf{n} ds = (dy, -dx).$$

Entonces, para $\mathbf{F} = (P, Q)$:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_{\partial\Omega} P dy - Q dx \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA.$$

Teorema de la divergencia en el plano

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dA.$$

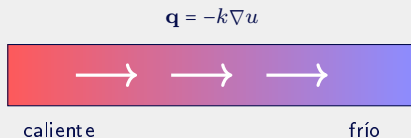
En Física: el *flujo neto* de $\mathbf{F}$ que sale de Ω es igual a la *producción total* de $\mathbf{F}$ en su interior. Es la versión plana del Teorema de Gauss, $\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV$ para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

La ley de Fourier

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ una placa delgada y $u(x, y, t)$ su temperatura. Entonces:

(1) Ley de Fourier (1822). El calor fluye de lo caliente a lo frío, con rapidez proporcional al gradiente de temperatura. El **flujo de calor** es el campo vectorial

$$\mathbf{q} = -k \nabla u, \quad k > 0 \text{ la conductividad térmica.}$$



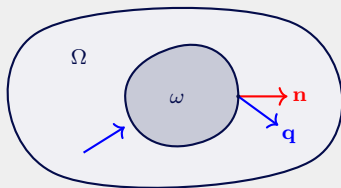
(2) Balance de energía. La energía térmica contenida en una subregión $\omega \subseteq \Omega$ es

$$E_{\omega}(t) = \iint_{\omega} c \rho u(x, y, t) dA,$$

donde c es el calor específico y ρ la densidad del material.

El balance de energía

Sea $\omega \subseteq \Omega$ cualquier subregión con borde regular. **La energía no se crea ni se destruye:** su variación en ω se debe sólo a lo que *entra por el borde* más lo que *generan las fuentes internas* f :



Ley de conservación

$$\frac{d}{dt} \iint_{\omega} c \rho u \, dA = \underbrace{- \oint_{\partial\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds}_{\text{flujo que entra por } \partial\omega} + \underbrace{\iint_{\omega} f \, dA}_{\text{fuentes}}$$

El signo "−" es porque $\mathbf{n}$ es la normal **exterior**: si $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} > 0$, el calor *sale* de ω .

Green + Localización = Ecuación del calor

Suponiendo u regular, derivamos bajo el signo integral a la izquierda y aplicamos el **Teorema de la divergencia** a la derecha, con $\mathbf{F} = \mathbf{q} = -k\nabla u$:

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_{\omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}) \, dA = - \iint_{\omega} \operatorname{div}(k\nabla u) \, dA.$$

Por la ley de conservación, **todo se reduce a una sola integral**:

$$\iint_{\omega} \left[c\rho u_t - \operatorname{div}(k\nabla u) - f \right] dA = 0.$$

Argumento de localización

Esto vale para **toda** subregión $\omega \subseteq \Omega$. Si el integrando g es continuo y $g(p) > 0$ para algún $p \in \Omega$, entonces $g > 0$ en un disco $\omega \subseteq \Omega$ centrado en p , y ahí $\iint_{\omega} g \, dA > 0$: contradicción. Luego $g \equiv 0$ y

$$c\rho u_t = \operatorname{div}(k\nabla u) + f \quad \text{en } \Omega.$$

La ecuación del calor

Si el material es **homogéneo** (c, ρ, k constantes), entonces $\operatorname{div}(k \nabla u) = k \operatorname{div}(\nabla u) = k \Delta u$ y, dividiendo por $c\rho$:

Ecuación del calor

$$u_t = \alpha \Delta u + F, \quad \alpha := \frac{k}{c\rho} > 0 \text{ (difusividad térmica)}, \quad F := \frac{f}{c\rho}.$$

Tres casos particulares importantes:

- ❶ **Barra unidimensional** ($u = u(x, t)$, sin fuentes):

$$u_t = \alpha u_{xx}.$$

- ❷ **Caso estacionario** ($u_t = 0$): aparece la **ecuación de Laplace**

$$\Delta u = 0 \quad (\text{o de Poisson } \Delta u = g \text{ si hay fuentes}).$$

- ❸ El *mismo* balance con $\mathbf{q} = c\mathbf{u}$ (transporte por un fluido, sin difusión) da la **ecuación de transporte** $u_t + c u_x = 0$.

Condiciones iniciales y de borde

La EDP por sí sola tiene infinitas soluciones. El **problema bien planteado** agrega una **condición inicial** $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ en Ω (temperatura inicial) y una **condición de borde** en $\partial\Omega$, para todo $t > 0$. Las tres clásicas:

- ❶ **Dirichlet:** $u = g$ sobre $\partial\Omega$. *Se impone la temperatura del borde* (extremos en un baño térmico).
- ❷ **Neumann:** $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = g$ sobre $\partial\Omega$. *Se impone el flujo*; en particular $g = 0$ significa **borde aislado** ($\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$).
- ❸ **Robin (o mixta):** $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \beta u = g$, con $\beta > 0$. *Ley de enfriamiento de Newton*: el intercambio con el ambiente es proporcional a la diferencia de temperatura.

Cada condición de borde dará un problema de Sturm–Liouville distinto, y por lo tanto una base de Fourier distinta (sin, cos, o ambas).

Primeras soluciones (y una advertencia)

Ejemplo. Verifiquemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la función

$$u_n(x, t) = e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

resuelve $u_t = \alpha u_{xx}$ en $(0, L)$ con $u(0, t) = u(L, t) = 0$ (Dirichlet homogéneo):
en efecto, $u_t = -\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n$ y $\alpha u_{xx} = -\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n$. ✓

Por **superposición**, toda combinación $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n u_n(x, t)$ es ("formalmente") solución, y el dato inicial obliga a

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right): \quad \text{¡una serie de Fourier!}$$

¿Se puede escribir *cualquier* u_0 así? ¿La serie converge? ¿Se puede derivar término a término? ¿De dónde salieron los $\sin(n\pi x/L)$?

- ❶ Para cada EDP, decidir si es lineal y si es homogénea:

$$u_t = u_{xx} + u, \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} + \sin(t), \quad u_x u_y = u, \quad \Delta^2 u = 0.$$

- ❷ Encontrar la solución general de $u_{xy} = x^2 y$ en $\mathbb{R}^2$.
- ❸ Sea u solución de $u_t = \alpha \Delta u$ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ con condición de **Neumann homogénea** $\partial u / \partial \mathbf{n} = 0$ en $\partial \Omega$. Probar, usando Teorema de la divergencia, que la *energía total* se conserva: $\frac{d}{dt} \iint_{\Omega} u \, dA = 0$.
- ❹ (Cultura general) Probar que el **núcleo del calor**

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-x^2/(4\alpha t)}$$

resuelve $u_t = \alpha u_{xx}$ para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ (barra infinita).

Hoy

- Una EDP tiene **funciones arbitrarias** en su solución general: hacen falta condiciones iniciales y de borde.
- Las EDP clásicas se *deducen* de una ley de conservación más una ley constitutiva (por ejemplo, Fourier), usando **Green** (u otros teoremas de Cálculo Vectorial) y localización.
- Calor, Laplace y transporte son variantes del mismo balance.

Próximas clases

- Separación de variables y problemas de **Sturm–Liouville**: valores y funciones propias, ortogonalidad.
- **Series de Fourier**, convergencia e identidad de Parseval.
- Calor, onda y Laplace en dominios acotados; problemas no homogéneos.

Gracias por su atención