MAT451 : Geometría Compleja

Todas las variedades serán reducidas e irreducibles y definidas sobre $\mathbb{C}$.

Referencias principales:

1. A. Beauville "Complex Algebraic Surfaces"
2. D. Eisenbud & J. Harris "3264 and all that: A second course in Algebraic Geometry"
3. M. de Cataldo "The Hodge Theory of Projective Manifolds"

Parte I: Superficies algebraicas y Geometría birracional

§1. Motivación y Preliminares

Sea X una variedad proyectiva suave (reducida, irreducible, definida sobre $\mathbb{C}$) con $n = \dim_{\mathbb{C}}(X) \geq 1$. Uno de los principales invariantes de X es su grupo de Picard

$$\mathrm{Pic}(X) := \{\text{fibrados en rectas}\}/\cong$$

que es un grupo abeliano resp. al producto tensorial. Dado que X es suave, $\mathrm{Pic}(X)$ es isomorfo al grupo de clases $\mathrm{Cl}(X)$, formado por divisores de Weil módulo equivalencia lineal. Más precisamente: Todo $L \in \mathrm{Pic}(X)$ es de la forma $L = \mathcal{O}_X(D)$ para cierto $D = \sum_{\text{finita}} n_i Y_i$ divisor de Weil (ie, $n_i \in \mathbb{Z}$ y Y_i hipersup. irreducible) y si $D \sim D'$ (ie, $\exists f \in \mathbb{C}(X)^*$ función racional no-nula tal que $D = D' + \mathrm{div}(f)$) entonces $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(D')$. En particular, $\mathcal{O}_X(\mathrm{div}(f)) \cong \mathcal{O}_X$ es el neutro en $\mathrm{Pic}(X)$. Además, si $s \in H^0(X, L)$ sección regular, entonces $\mathrm{div}(s) \geq 0$ es un divisor efectivo (único módulo reescalar s) con $\mathrm{div}(s) \sim D$, donde $L \cong \mathcal{O}_X(D)$, y con ello se tiene una biyección

$$\mathbb{P}H^0(X,L) \simeq |D| := \{E \geq 0,\ E \sim D\},\quad [s] \mapsto E := \mathrm{div}(s)$$

Dado que X es una variedad proyectiva, para todo haz coherente $\mathcal{F}$ (eg. $L \in \mathrm{Pic}(X)$) se tiene que los grupos de cohomología $H^i(X, \mathcal{F})$ son $\mathbb{C}$-esp. vectoriales de dim. finita $\forall i \geq 0$. Además, se verifica la dualidad de Serre - Grothendieck $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee$ $\forall i \geq 0$ y en particular para $\mathcal{F} = L \cong \mathcal{O}_X(D)$ tenemos:

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))^\vee,$$

donde $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X) \overset{\text{def}}{\cong} \det(\Omega^1_X)$ es el fibrado en rectas (o divisor) canónico de X.

Supongamos que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$, ie, $X =: C$ es una curva algebraica:

En tal caso, decimos que $g(C) := h^0(C, \omega_C) \overset{\text{Serre}}{=} h^1(C, \mathcal{O}_C)$ es el género de la curva C y para todo $L \cong \mathcal{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ se verifica el Teorema de Riemann-Roch:

$$\chi(C, \mathcal{O}_C(D)) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \deg(D) \overset{\text{Serre}}{\Longleftrightarrow} h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - h^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - D))$$
$$= \deg(D) + 1 - g(C)$$

donde para $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot p_i$ divisor de Weil en C, $\deg(D) := \sum_{i=1}^r n_i \in \mathbb{Z}$, y donde se verifica que $\deg(\omega_C) \overset{\text{def}}{=} \deg(K_C) = 2g(C) - 2$. Usando esto, se puede probar que:

1. $g(C) = 0 \iff C \cong \mathbb{P}^1$ es la recta proyectiva, y $\omega_{\mathbb{P}^1}^\vee \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ es amplio.
2. $g(C) = 1 \iff \omega_C \cong \mathcal{O}_C$ trivial $\iff C \cong E = V(f_3) \subseteq \mathbb{P}^2$ es una curva elíptica.
3. Si $L \cong \mathcal{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ entonces L amplio $\iff \deg(L) \overset{\text{def}}{=} \deg(D) > 0$. En part, si $g(C) \geq 2$ entonces ω_C es amplio y C es una curva canónicamente polarizada.

⚠ El divisor amplio K_C puede no ser muy amplio (ie, $\varphi_{\omega_C} : C \hookrightarrow \mathbb{P}H^0(C,\omega_C)$ es un incrustamiento) y de hecho: ω_C muy amplio $\Leftrightarrow$ C no es hiperelíptica. Aquí, C es hiperelíptica si $\exists\, f : C \to \mathbb{P}^1$ morfismo regular con $\deg(f) = 2$.

Por otro lado, se tiene que si $L = \mathcal{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ cumple $\deg(D) \geq 2g(C)+1$ entonces L es muy amplio. En particular, toda curva C de género $g = g(C) \geq 2$ cumple que $\deg(3K_C) = 6g-6 \geq 2g+1$ y luego $L := \omega_C^{\otimes 3}$ es muy amplio, y por el Teorema de Riemann-Roch $h^0(C,L) = 6g-6+1-g = 5g-5$ y así:

$$\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}H^0(C,L) \simeq \mathbb{P}^{5g-6}$$

es un incrustamiento cerrado y $\varphi_L(C)$ es una curva "tricanónica" de grado $6g-6$ en $\mathbb{P}^{5g-6}$ con polinomio de Hilbert $P(m) := \chi(C, L^{\otimes m}) \overset{\text{def}}{=} \chi(C, \mathcal{O}_C(3mK_C)) \overset{RR}{=} (6m-1)(g-1)$.

Hecho (Grothendieck 1961, Deligne-Mumford 1969): Existe un esquema proyectivo $\mathcal{H} := \mathrm{Hilb}^P(X)$, llamado esquema de Hilbert, parametrizando subesquemas Z de $X = \mathbb{P}^{5g-6}$ con polinomio de Hilbert $h_Z = P$ y $\exists\, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$ abierto parametrizando curvas suaves irreducibles en X. El cociente $\mathcal{M}_g := \mathcal{U}/PGL_{5g-5}$ es una variedad quasi-proyectiva irreducible cuyos puntos corresponden a curvas suaves de género $g \geq 2$ módulo isomorfismo: es un espacio de moduli!

Ejemplo: El Teorema de Riemann-Hurwitz señala que si $f : C_1 \twoheadrightarrow C_2$ morfismo no-constante entre curvas suaves con $g_i = g(C_i)$, entonces

$$2g_1 - 2 = \deg(f)(2g_2-2) + \sum_{p\in C_1}(e_p(f)-1),$$

donde $e_p(f) \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ es el índice de ramificación de f en $p \in C_1$. En part, si consideramos $C := \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2,\ y^2 z^{2g-1} = (x-a_1 z)\cdots(x-a_{2g+1}z)\}$ para $g \geq 2$ fijo y $a_i \in \mathbb{C}$ con $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, entonces C es una curva suave y $f : C \to \mathbb{P}^1$, $[x,y,z] \mapsto [y,z]$ es un morfismo regular de $\deg(f) = 2$ y con $e_p(f) > 1$ exactamente en $p_0 = [0,1,0]$ y $p_i = [a_i, 0, 1]$ con $i \in \{1,..,2g+1\}$, y donde $e_{p_i}(f) = 2$ (pues $\deg(f) = 2$). Así, el Teo. de Riemann-Hurwitz implica que $2g(C) - 2 = 2\cdot(-2) + 2g+2$, ie, $g(C) = g$.

⚠ En particular, $\mathcal{M}_g \neq \emptyset$ $\forall g \geq 2$ y se puede probar que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_g = 3g-3$.

Recuerdo: Si $f : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional con X irreducible suave y con Y proyectiva, entonces $\mathrm{Exc}(f) := X \setminus \mathrm{Dom}(f)$ es un cerrado de $\mathrm{codim}_X \mathrm{Exc}(f) \geq 2$. En particular, si C_1 y C_2 son curvas proy. suaves e irreducibles y $C_1 \underset{\text{bir}}{\sim} C_2$ (ie, $\exists\, \mathcal{U}_i \subseteq C_i$ abiertos densos con $\mathcal{U}_1 \cong \mathcal{U}_2$) entonces $C_1 \cong C_2$. Así: "curvas birracionales son birregulares".

Lo anterior es falso en dimensión superior y da origen a la "Geometría Birracional":

Ejemplo: Si $S = \mathbb{P}^2$ y $p = [0,0,1] \in \mathbb{P}^2$, entonces podemos considerar el blow-up

$$\widetilde{S} := \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2 \overset{\text{def}}{=} \left\{([x,y,z],[u,v]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1,\ \det\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = xv - uy = 0\right\} \xrightarrow{\varepsilon = pr_1} \mathbb{P}^2$$

Aquí, $\varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ es el divisor excepcional del blow-up, denotado $E \subseteq \widetilde{S}$ y cumple $\mathcal{O}_E(E) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\widetilde{S}}(E)|_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ y en part $\mathcal{O}_E(E)$ no es amplio en $E \cong \mathbb{P}^1$. Por otro lado, en $\mathbb{P}^2$ todo divisor efectivo no-nulo es amplio y por ende su restricción a toda curva es amplio. Así, $S \underset{\text{bir}}{\sim} \widetilde{S}$ pero $S \not\cong \widetilde{S}$.

⚠ En el ejemplo anterior, $S \cong \mathbb{P}^2$ es "más simple" que $\tilde{S} \cong Bl_p \mathbb{P}^2$ y este es el principio general en dimensión 2: la idea de la clasificación de Kodaira - Enriques es: (3)

(1°) Detectar si $S =: S_0$ es tal que $S_0 \cong Bl_p(S_1)$ para cierta sup. S_1.

(2°) Iterar $S_0 \xrightarrow{\varepsilon_1} S_1 \xrightarrow{\varepsilon_2} \dots \xrightarrow{\varepsilon_m} S_m$ para llegar en finitos pasos a S_m "minimal".

(3°) Clasificar las posibles S_m de acuerdo a $\kappa(S_m) = \kappa(S)$ dimensión de Kodaira.

La generalización de esto a dimensión 3 o superior es conocida como el "Minimal Model Program" (MMP) y comenzó con los trabajos de Shigefumi Mori (1988) para 3-folds.

§2. Teoría de intersección en superficies

En todo lo que sigue, S será una superficie (proyectiva, suave, irreducible, def. sobre $\mathbb{C}$).

Por un lado, si $f: S \to X$ es un morfismo regular a una variedad suave X y $\mathcal{O}_X(D)$ es un fib. en rectas en X, entonces $f^*\mathcal{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas en S, y con ello obtenemos un morfismo de grupos $f^*: \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(S)$. Por ejemplo:

1) Si f sobreyectivo, $f^*\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_S(f^*D)$.

2) Si $f = \varphi_L : S \longrightarrow X = \mathbb{P}H^0(X,L) \cong \mathbb{P}^n$ entonces $\varphi_L^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = L$.

Por otro lado, si X es otra superficie y f es genéricamente finito de grado d (eg. un blow-up es genéricamente finito de grado 1), entonces para $C \subseteq S$ curva irreducible:

$$f_*C = \begin{cases} 0 & \text{si } f(C) = \{p\} \text{ punto} \\ \deg(f|_C)\cdot f(C) & \text{si } f(C) \subseteq X \text{ curva.} \end{cases}$$

y luego podemos definir f_*D para todo divisor de Weil D en S; y si $D \sim D'$ en S entonces $f_*D \sim f_*D'$ en X por def. de equivalencia lineal. Así, por definición:

$$f_*f^*D = dD \text{ para todo divisor } D \text{ en } X.$$

Obs: Si $C, C' \subseteq S$ son curvas irred. distintas y $x \in C \cap C'$ entonces, como S suave, C y C' están dadas por únicas ecuaciones f y g en $\mathcal{O}_{S,x}$, resp. Como $\mathcal{O}_{S,x}$ es un anillo Noetheriano de dimensión (de Krull) 2, $\mathcal{O}_{S,x}/\langle f,g\rangle$ es un $\mathbb{C}$-esp. vect. de dim. finita. Dado que $\mathcal{O}_{S,x}$ anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{S,x}$ (con $\mathcal{O}_{S,x}/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{C}$) se tiene que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{S,x}/\langle f,g\rangle = 1 \iff \langle f,g\rangle = \mathfrak{m}_x$, i.e., (f,g) param. locales en $x \in S$. En general, dicha ~~tangencia~~ dimensión mide la "tangencia" de intersección (cf. $f = Y$ y $g = Y - X^n$ en $\mathbb{C}[X,Y]$, con $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X,Y]/\langle f,g\rangle = n$):

Def: Con la notación anterior, la multiplicidad de intersección de C y C' en $x \in C \cap C'$ es $m_x(C \cap C') := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{S,x}/\langle f,g\rangle$, y decimos que la intersección es transversal en x si $m_x(C\cap C') = 1$. De manera más general, definimos el nº de intersección de C y C' por:

$$C \cdot C' := \sum_{x \in C\cap C'} m_x(C \cap C').$$

Recuerdo: Si D es un divisor efectivo en una variedad suave X, entonces $\mathcal{I}_D \cong \mathcal{O}_X(-D)$ y hay una sucesión exacta de haces coherentes $0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_D \to 0$ donde $i: D \hookrightarrow X$ es la inclusión. Así, $\mathcal{O}_{C\cap C'} = \mathcal{O}_S/(\mathcal{O}_S(-C) + \mathcal{O}_S(-C'))$ es un haz rascacielos y $C\cdot C' \overset{\text{def}}{=} h^0(S, \mathcal{O}_{C\cap C'})$ pues $(\mathcal{O}_{C\cap C'})_x = \mathcal{O}_{S,x}/\langle f,g\rangle$ con la notación anterior.

Lema: Si $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C)) \setminus \{0\}$ y $s' \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C')) \setminus \{0\}$ entonces la sucesión $0 \to \mathcal{O}_S(-C-C') \xrightarrow{(s',s)} \mathcal{O}_S(-C) \oplus \mathcal{O}_S(-C') \xrightarrow{(s,s')} \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_{C \cap C'} \to 0$ es exacta.

Dem: En $x \in C \cap C'$, con $C \overset{loc}{=} \{f=0\}$, $C' \overset{loc}{=} \{g=0\}$ lo anterior se reduce a la exactitud de $0 \to \mathcal{O}_{S,x} \underset{\alpha}{\xrightarrow{(g,-f)}} \mathcal{O}_{S,x}^{\oplus 2} \underset{\beta}{\xrightarrow{(f,g)}} \mathcal{O}_{S,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{S,x}/\langle f,g \rangle \to 0$, ie, si $a,b \in \mathcal{O}_{S,x}$ son tales que $af = bg$ entonces $\exists\, K \in \mathcal{O}_{S,x}$ con $a = Kg$ y $b = Kf$ (ie, $\ker(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$), y lo anterior sigue del hecho que f, g coprimos en el DFU $\mathcal{O}_{S,x}$ ∎

Teorema: La aplicación producto intersección

$$\mathrm{Pic}(S) \times \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathbb{Z}, \ (L, L') \mapsto L \cdot L' := \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L^\vee) - \chi(L'^\vee) + \chi(L^\vee \otimes L'^\vee)$$

es bilineal simétrica, y si $C, C' \subseteq S$ curvas irred. distintas $\mathcal{O}_S(C) \cdot \mathcal{O}_S(C') = C \cdot C'$.

Dem: La última propiedad sigue del Lema anterior aplicando $\chi(\cdot)$ a la suc. exacta, y la simetría es por definición. Veamos la bilinealidad: Consideremos primero $C \subseteq S$ curva suave irreducible y $L \in \mathrm{Pic}(S)$ y notar que $\mathcal{O}_S(C) \cdot L = \deg(L|_C)$: las sucesiones

(1): $0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_C \to 0$ y (2) $=$ (1) $\otimes L^\vee$: $0 \to L^\vee(-C) \to L^\vee \to \underbrace{L^\vee \otimes \mathcal{O}_C}_{\overset{def}{=} L^\vee|_C} \to 0$

implican $\chi(\mathcal{O}_S) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(\mathcal{O}_S(-C))$ y $\chi(L^\vee) = \chi(L^\vee(-C)) + \chi(L^\vee|_C)$.

Luego: $\mathcal{O}_S(C) \cdot L \overset{def}{=} \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L^\vee) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) + \chi(L^\vee(-C)) = \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(L^\vee|_C)$

$\overset{RR}{=} -\deg(L^\vee|_C) = +\deg(L|_C)$ ✓

y en part obtenemos la bilinealidad cuando un factor es de la forma $\mathcal{O}_S(C)$ (pues "deg" es bilineal). Dado que S proyectiva, $\exists\, S \overset{\varphi_{\mathcal{O}_S(1)}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N$ para cierto $\mathcal{O}_S(1) \in \mathrm{Pic}(S)$ muy amplio. Dado que $L \in \mathrm{Pic}(S)$ es un haz coherente, $\exists\, m \gg 0$ tal que $L(m) \overset{def}{=} L \otimes \mathcal{O}_S(m)$ es glob. generado (por resultados de Serre). En part, el Teo. de Bertini implica que $\exists\, A, B \subseteq S$ curvas suaves irred con $\mathcal{O}_S(A) \cong L(m)$ y $\mathcal{O}_S(B) \cong \mathcal{O}_S(m)$, ie, $L \cong \mathcal{O}_S(A-B)$, y luego $L \cdot L' = \mathcal{O}_S(A) \cdot L' - \mathcal{O}_S(B) \cdot L'$ es bilineal ✓ ∎

Observaciones prácticas: Para hacer cálculos explícitos en S es común usar:

(1) Si $C \subseteq S$ curva suave irred, $\mathcal{O}_S(C) \cdot L = \deg(L|_C)$ y luego $C \cdot C' = \deg(\mathcal{O}_S(C')|_C)$. Por ejemplo, si $S = \mathbb{P}^2$ y $C, C' \subseteq \mathbb{P}^2$ son curvas irred. de grados d, d' distintas, entonces $C \sim d\ell$, $C' \sim d'\ell$ con $\ell \cong \mathbb{P}^1$ recta. Como $\ell^2 \overset{def}{=} \ell \cdot \ell = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\ell)|_\ell) = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|_\ell) = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = 1$, tenemos por bilinealidad del producto intersección que $C \cdot C' = (d\ell) \cdot (d'\ell) = dd' \cdot \ell^2 = dd'$ (Teorema de Bézout).

(2) Si $f: S \twoheadrightarrow C$ morfismo sobrey. y C curva suave, entonces para $F = f^{-1}(t)$ fibra de f se tiene que $F^2 = 0$. En efecto: El divisor $D = t$ en C es amplio (pues $\deg D = 1 > 0$) y luego $\forall m \gg 0$ existe $A_m \geq 0$ efectivo con $A_m \sim tm$ y con $t \notin \mathrm{Supp}(A_m)$ (pues $\mathcal{O}_C(mt)$ no posee puntos base). Así, $A_{m+1} - A_m =: A \sim t$ cumple $F \sim f^*A$ y por construcción $F^2 = F \cdot f^*A = 0$ ✓

(3) Si $f: S \to S'$ morfismo genericamente finito de grado d entre superficies proy. lisas y D, D' divisores en S', entonces $f^*D \cdot f^*D' = d(D \cdot D')$. En efecto, como en el Teo. anterior, basta asumir que D y D' son curvas suaves irred. generales. Podemos suponer que D y D' se intersectan transversalmente fuera del lugar de ramificación, y luego $f^*D \cap f^*D' = f^{-1}(D \cap D')$ ✓

Ejercicio: Recuerde que $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)\cong\mathbb{Z}^2$ con generadores Γ_1, Γ_2 con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(\Gamma_1)\cong pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ $\overset{\text{def}}{=}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,0)$ y $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(\Gamma_2)\cong pr_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(0,1)$, i.e., $L\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(a,b)\in\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$ está det. por $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$. Probar que si $C\sim m\Gamma_1+n\Gamma_2$ y $C'\sim m'\Gamma_1+n'\Gamma_2$, $C\cdot C'=mn'+nm'$.

<u>Teorema de Riemann-Roch</u> (para superficies algebraicas): Sea S superficie proyectiva suave y sea $L\cong\mathcal{O}_S(D)\in\mathrm{Pic}(S)$. Entonces:

$$\chi(S,L)=\chi(\mathcal{O}_S)+\tfrac{1}{2}\left(L^2-L\cdot\omega_S\right)\overset{\text{def}}{=}\chi(\mathcal{O}_S)+\tfrac{1}{2}\left(D^2-D\cdot K_S\right)$$

<u>Dem</u>: Por def, $(L^\vee\cdot L\otimes\omega_S^\vee)\overset{\text{def}}{=}\chi(\mathcal{O}_S)-\chi(L)-\chi(\omega_S\otimes L^\vee)+\chi(\omega_S)$. Por dualidad de Serre, $\chi(\omega_S)=\chi(\mathcal{O}_S)$ y $\chi(\omega_S\otimes L^\vee)=\chi(L)$ y luego por <u>bilinealidad</u>:

$$2\left(\chi(\mathcal{O}_S)-\chi(L)\right)=L^\vee\cdot(L\otimes\omega_S^\vee)=-L^2+(-L)\cdot(-\omega_S)\ \checkmark\ \blacksquare$$

<u>Corolario</u> (Fórmula del género): Sea $C\subseteq S$ curva irreducible. Si definimos el <u>género</u> de C por $g(C):=h^1(C,\mathcal{O}_C)$ entonces: $g(C)=1+\tfrac{1}{2}(C^2+C\cdot K_S)$.

<u>Dem</u>: La sucesión $0\to\mathcal{O}_S(-C)\to\mathcal{O}_S\to\mathcal{O}_C\to 0$ implica $\chi(\mathcal{O}_C)\overset{\text{def}}{=}1-g(C)=\chi(\mathcal{O}_S)-\chi(\mathcal{O}_S(-C))$ y $\chi(\mathcal{O}_S(-C))\overset{RR}{=}\chi(\mathcal{O}_S)+\tfrac{1}{2}(C^2+C\cdot K_S)$ $\blacksquare$

<u>Ejemplo</u>: Sea $C\in|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|$ curva suave, $C\sim d\ell$ con ℓ recta en $\mathbb{P}^2$. Dado que $K_{\mathbb{P}^2}\sim-3\ell$ (pues $\omega_{\mathbb{P}^n}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$), $C^2=d^2$ (Bézout) y $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})=1$, se tiene $g(C)=1+\tfrac{1}{2}(d^2-3d)=\tfrac{1}{2}(d-1)(d-2)$ "fórmula de Plücker".

⚠ Si $C\subseteq S$ curva irreducible y $\nu: C^\nu\to C$ su normalización, entonces hay una sucesión exacta $0\to\mathcal{O}_C\to\nu_*\mathcal{O}_{C^\nu}\to\delta\to 0$ donde δ haz rascacielos soportado en $\mathrm{Sing}(C)\subsetneq C$. Luego $h^1(C,\delta)=0$ y la suc. exacta larga en cohomología implica que $g(C)=g(C^\nu)+\sum_{x\in C}\dim(\delta_x)$ y luego $g(C)>g(C^\nu)$ si C es singular.

<u>En particular</u>: si $g(C)\overset{\text{def}}{=}h^1(C,\mathcal{O}_C)=0$ entonces $C\cong\mathbb{P}^1$ es <u>suave</u>.

<u>Hecho</u> (Geometría Compleja): Dado que la superficie S está definida sobre $\mathbb{C}$ podemos considerar la <u>variedad compleja</u> S^{an}, que luce localmente como un abierto <u>euclideano</u> (en lugar de abierto Zariski!) de $\mathbb{C}^2$ y con cambios de carta holomorfos, y considerar $\mathcal{O}_{S^{an}}$ el haz de funciones holomorfas en S^{an}. En tal caso, podemos considerar la suc. exponencial

$$0\to\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathcal{O}_{S^{an}}\xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)}\mathcal{O}^*_{S^{an}}\to 0$$

Por compacidad (y Teo. de Liouville) $H^0(S^{an},\mathcal{O}_{S^{an}})\cong\mathbb{C}$ y $H^0(S^{an},\mathcal{O}^*_{S^{an}})$ y luego en cohomología (de Čech) tenemos:

$$0\to H^1(S^{an},\mathbb{Z})\to H^1(S^{an},\mathcal{O}_{S^{an}})\to H^1(S^{an},\mathcal{O}^*_{S^{an}})\cong\mathrm{Pic}(S^{an})\xrightarrow{c_1}H^2(S^{an},\mathbb{Z})\to\dots$$

Por GAGA (Serre, 1956): $\mathrm{Pic}(S^{an})\cong\mathrm{Pic}(S)$ y $H^i(S^{an},\mathcal{O}_{S^{an}})\cong H^i(S,\mathcal{O}_S)$ pues S proyectiva. Si escribimos $H^i(S^{an},\mathbb{Z})=:H^i(S,\mathbb{Z})$ entonces:

① Dado que S es una variedad compacta, los $H^i(S,\mathbb{Z})$ son grupos abelianos finitamente generados y $b_i(S):=\mathrm{rg}\,H^i(S,\mathbb{Z})$ es su i-ésimo nº de Betti.

② El morfismo de conexión $c_1:\mathrm{Pic}(S)\to H^2(S,\mathbb{Z})$, $\mathcal{O}_S(\sum n_iC_i)\mapsto\sum n_i[C_i]$ es llamado la <u>primera clase de Chern</u>.

El grupo $\mathrm{Im}(c_1) =: NS(S)$ es el grupo de Néron-Severi de S y su rango $\rho(S) \le b_2(S)$ se llama el nº de Picard de S. Por exactitud en cohomología, hay una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(S) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(S) \xrightarrow{c_1} NS(S) \to 0$$

donde $\mathrm{Pic}^0(S) \overset{\text{def}}{=} \ker(c_1) \cong H^1(S,\mathcal{O}_S)/H^1(S,\mathbb{Z})$, y se puede probar que:

$c_1(L) = c_1(L')$ módulo torsión $\iff L \equiv L'$ son numéricamente equivs. (i.e., $L\cdot C = L'\cdot C \ \forall C \subseteq S$)

③ Fórmula de Noether (Max Noether, 1870): Si $\chi_{top}(S) := \sum_{i=0}^{4} (-1)^i b_i(S)$ es la característica de Euler topológica de S (con $b_i(S) = b_{4-i}(S)$ por dualidad de Poincaré), entonces

$$\chi(S,\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}\left(K_S^2 + \chi_{top}(S)\right).$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}) = 1$ y calcular el género de $C \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(a,b)|$ suave, con $a,b\geq 1$.

④ Anulación de Kodaira (Kunihiko Kodaira, 1953): Sea X una variedad proyectiva suave compleja de $\dim_{\mathbb{C}}(X) = m$ y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas amplio, entonces:

$$H^i(X,\omega_X\otimes L) = 0 \ \forall i\geq 1 \overset{\text{Serre}}{\iff} H^j(X,L^\vee)=0 \ \forall j \leq m-1.$$

§3. Superficies minimales

La operación fundamental en la geometría birracional de superficies es el blow-up:

Recuerdo: Sea $p\in S$ un punto y sean $x,y \in \mathcal{O}_S(\mathcal{U})$ coord. locales en una vecindad afín $\mathcal{U}\subseteq S$ de p tal que $V(x)\cap V(y) = \{p\}$. Definimos el blow-up de $p \in \mathcal{U}$ como

$$\tilde{\mathcal{U}} := \{((x,y),[u,v]) \in \mathcal{U}\times\mathbb{P}^1,\ xv - yu = 0\} \xrightarrow{\varepsilon := pr_1} \mathcal{U}$$

Así, $\varepsilon^{-1}(p) = \{p\}\times\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^1$ y $\tilde{\mathcal U}\setminus\varepsilon^{-1}(p) \xrightarrow[\varepsilon]{\sim} \mathcal U\setminus\{p\}$ es un isomorfismo. Luego, podemos construir el blow-up de $p\in S$ como la superficie $\tilde S \xrightarrow{\varepsilon} S$ obtenida pegando $\tilde{\mathcal U}$ y $S\setminus\{p\}$ a lo largo de $\mathcal U\setminus\{p\} \cong \tilde{\mathcal U}\setminus\varepsilon^{-1}(p)$ y denotamos $E := \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ al divisor excepcional de ε.

Observaciones prácticas: Para hacer cálculos explícitos en $\tilde S = \mathrm{Bl}_p(S)$ es común usar:

① Si $p\in C\subseteq S$ con C curva irreducible y $\mathrm{mult}_p(C) = m$ entonces $\varepsilon^* C = \tilde C + mE$ donde $\tilde C = \overline{\varepsilon^{-1}(C\setminus\{p\})}^{\text{Zar}}$ es la transformada estricta de C en $\tilde S$. En efecto:

Si (x,y) coord. locales en torno a p y $C \overset{\text{loc}}{=} \{f=0\}$ con $f = f_m(x,y) + f_{m+1}(x,y)+\dots$ con $f_k\in\mathbb{C}[x,y]_k$ pol. homog. de grado k, entonces en el abierto de $\tilde{\mathcal U}$ con $\{u\neq0\}$ se tienen coord. locales $(x, y=xv)$ con $E \overset{\text{loc}}{=} \{x=0\}$ y donde

$$\varepsilon^* f \overset{\text{def}}{=} f(x,xv) = x^m f_m(1,v) + x^{m+1} f_{m+1}(1,v) + \dots = x^m\cdot\tilde f(v) \quad \text{y así } \varepsilon^*C = \tilde C + mE.$$

② $\mathrm{Pic}(S)\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\tilde S)$, $(D,n)\mapsto \varepsilon^*D + mE$ es un isomorfismo y $K_{\tilde S} = \varepsilon^*K_S + E$.

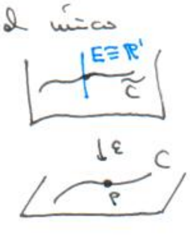
③ $NS(\tilde S) \cong NS(S)\oplus\mathbb{Z}[E]$ y en particular $\rho(\tilde S) = \rho(S)+1$.

④ La teoría de intersección de $\tilde S$ está dada por:

(a) $\varepsilon^*D\cdot\varepsilon^*D' = D\cdot D'$ $\forall D,D'$ div. en S, (b) $E\cdot\varepsilon^*D = 0$, (c) $E^2=-1$

En efecto, podemos reemplazar D y D' por div. linealmente equivs. tales que $p\notin \mathrm{Supp}(D),\mathrm{Supp}(D')$ y luego (a) y (b) son automáticos. Por Teo. de Bertini, existe una curva irreducible pasando por p con $\mathrm{mult}_p(C)=1$ y luego $\varepsilon^*C = \tilde C + E$. Su transf. estricta $\tilde C$ intersecta E en el único punto corresp. a la recta tangente a C en p y así $E\cdot\tilde C = 1$. Luego, por (b):

$$0 = E\cdot\varepsilon^*C = \underbrace{E\cdot\tilde C}_{=1} + E^2, \text{ i.e., } E^2 = -1.$$



Recuerdos sobre sistemas lineales: Sean X, S var proy. irreducibles y $\varphi : S \dashrightarrow X$ una aplicación racional. Si S superficie suave, $Z := \mathrm{Exc}(\varphi)$ es un conjunto finito de S. Luego, para $C \subseteq S$ curva irred. se define $\varphi(C) := \overline{\varphi(C \setminus Z)} \subseteq X$, y dado que $\mathrm{Pic}(S) \cong \mathrm{Pic}(S \setminus Z)$ el pullback $\varphi^* : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(S\setminus Z) \cong \mathrm{Pic}(S)$ está bien definido. Sea $L \cong \mathcal{O}_S(D) \in \mathrm{Pic}(S)$ con $\mathbb{P}H^0(S,L) \simeq |D| \overset{\mathrm{def}}{=} \{E \geq 0,\ E \sim D\}$, $[s] \mapsto \mathrm{div}(s)$ y sea $\mathrm{Bs}(L) := \bigcap_{E \in |D|} E$ el lugar de (puntos) base de L.

Decimos que L es globalmente generado si $\mathrm{Bs}(L) = \emptyset$, i.e., $\varphi_L : S \to \mathbb{P}H^0(S,L)$ es un morfismo regular. De manera similar, si $\Lambda_0 \subseteq H^0(S,L)$ subesp. no-nulo, entonces
$\mathbb{P}^n \simeq \Lambda := \mathbb{P}(\Lambda_0) \subseteq |D|$ es un sistema lineal de $\dim(\Lambda) = n$ en S, con $\varphi_\Lambda : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$

Denotamos por $F := \mathrm{Fix}(\Lambda)$ al máximo divisor efectivo tal que $E - F \geq 0$ $\forall E \in |D|$ (i.e., F está contenido, con multiplicidad, en todo $E \in |D|$) y luego $\mathrm{Supp}(F) = \bigcup_{C \subseteq \mathrm{Bs}(L)} C$ es la unión de las comp. irred. de dimensión 1 de $\mathrm{Bs}(L)$.

⚠ Si $\Lambda \subseteq |D|$ no tiene parte fija (i.e., $\mathrm{Fix}(\Lambda) = \emptyset$) decimos que Λ es *móvil*. En particular, $\mathrm{Bs}(\Lambda)$ es un conj. finito de cardinal $b_\Lambda \in \mathbb{N}$ y si $E_1, E_2 \in \Lambda$ son arbitrarios entonces $E_1 \cdot E_2 \geq b_\Lambda \geq 0$. Así, $b_\Lambda \leq E^2$ $\forall E \in \Lambda$. Además, hay una biyección:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n \text{ aplicación racional} \\ \text{tq } \varphi(S) \text{ no es linealmente degen.}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Sist. lin. } \Lambda \subseteq |D|, \text{ cierto } D, \\ \text{con } \mathrm{Fix}(\Lambda) = \emptyset \text{ y } \dim \Lambda = n\end{array}\right\}, \quad \begin{array}{l}\varphi \longmapsto \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \\ \varphi_\Lambda \longleftarrow\!\shortmid \Lambda\end{array}$$

Teorema (Resolución de indeterminación): Sea S sup. proy. suave, X var. proy. irreducible y sea $\varphi : S \dashrightarrow X$ aplicación racional. Entonces, existe una sup. proy. suave S' obtenida mediante $\eta : S' \to S$ finitos blow-ups y $f : S' \to X$ morfismo regular tal que

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & X \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Dem: Sup. $\varphi = \varphi_\Lambda : S \dashrightarrow \Lambda \cong \mathbb{P}^n$ con $\Lambda \subseteq |D|$ sist. lineal sin componentes fijas, y donde $\varphi(S) = X$. Si $\mathrm{Bs}(\Lambda) = \emptyset$, $\eta = \mathrm{Id}_S$ y $f = \varphi$ ✓ Sup. $p \in \mathrm{Bs}(\Lambda)$ y consideremos $\varepsilon_1 : S_1 := \mathrm{Bl}_p(S) \to S_0 := S$ con div. excepcional $E_1 \subseteq S_1$. Por def, $E \subseteq \mathrm{Bs}(\widetilde{\Lambda}_1)$ con $\widetilde{\Lambda}_1 := \varepsilon_1^* \Lambda$, y luego $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $\Lambda_1 := \varepsilon_1^* \Lambda - k_1 E_1 \subseteq |\varepsilon_1^* D - k_1 E_1|$ no tiene comp. fijas. Sea $\varphi_1 : S_1 \dashrightarrow \Lambda_1 \cong \mathbb{P}^n$ el mapa racional asoc. a Λ_1. Si φ_1 es regular, $\eta = \varepsilon_1$ y $f = \varphi_1$ ✓ Sino: obtenemos inductivamente una "torre" de blow-ups,

$$\begin{tikzcd} & & & S_k \arrow[dl] \arrow[ddr, dashed, "\varphi_k"] & \\ & & S_2 \arrow[dl] \arrow[dr, dashed, "\varphi_2"] & & \\ & S_1 \arrow[dl] \arrow[rr, dashed, "\varphi_1"] & & & \\ S \arrow[rrrr, dashed, "\varphi"'] & & & & X \end{tikzcd}$$

donde $b_k := \#$ puntos base de $\Lambda_k \leq D_k^2 = D_{k-1}^2 - k_m^2$ (por la teo. de intersección de un blow-up !), i.e., $b_k \leq D_k^2 < D_{k-1}^2$ y donde $D_k^2 \geq 0$ $\forall k \geq 1$. Luego, $\exists\, m \leq D^2$ tq $\varphi_m : S_m \to \mathbb{P}^n$ es regular ✓ ■

Ejercicio Considere la cuádrica suave $Q := \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3,\ x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3$ y sea $p = [0,0,0,1] \in Q$. Resuelva explícitamente la aplicación racional

$$\pi_p : Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \quad [x_0, x_1, x_2, x_3] \longmapsto [x_0, x_1, x_2]$$

y deduzca que $\mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \cong \mathrm{Bl}_{2\text{ pts}}(\mathbb{P}^2)$, donde $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ vía inmers. de Segre.

Ejercicio Resuelva la involución de Cremona $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $[x,y,z] \mapsto [yz, xz, xy]$.