



# Ayudantía 10 MAT451

20 de noviembre 2025

Profesor: Pedro Montero Estudiante: Mateo Hidalgo

## 1 Introducción: $G$ -linealizaciones

**Definición 1.1.** Una  $G$ -linealización de  $L$  es una acción  $\bar{\sigma} : G \times L \rightarrow L$  tal que

1. El diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times L & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & L \\ \text{id} \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

es conmutativo

2. La acción es lineal fibra a fibra.

Un fibrado en rectas  $G$ -linealizado (o un  $G$ -fibrado en rectas) sobre una  $G$ -variedad  $X$  es un par  $(L, \bar{\sigma})$  consistiendo de un fibrado en rectas  $L$  sobre  $X$  y su linealización. Un morfismo de fibrados en rectas  $G$ -linealizado es un morfismo  $G$ -equivariante de fibrados de líneas..

Sigue de la definición que para cualquier  $g \in G$  y cualquier  $x \in X$  el mapa inducido en fibras

$$\bar{\sigma}_x(g) : L_x \rightarrow L_{g \cdot x}$$

es un isomorfismo lineal.

Podemos ver el conjunto de tales isomorfismos como un isomorfismo de fibrados en rectas:

$$\bar{\sigma}(g) : L \rightarrow g^*(L),$$

donde consideramos  $g \in G$  como un automorfismo  $x \rightarrow g \cdot x$  de  $X$ . Los axiomas de la acción se traducen en las condiciones de 1-cociclo:

$$\bar{\sigma}(gg') = \bar{\sigma}(g') \circ g'^*(\bar{\sigma}(g)) : L \rightarrow g'^*(L) \rightarrow g'^*(g^*(L)) = (gg')^*(L).$$

La colección de estos isomorfismos  $\bar{\sigma}(g)$  también puede verse como un isomorfismo de fibrados:

$$\Phi : \text{pr}_2^*(L) \rightarrow \sigma^*(L).$$

La condición de cociclo se traduce en una condición de  $\Phi$  la cual puede ser expresada en diagramas conmutativos, lo cual se omite.

Usando la definición de linealización por medio de un isomorfismo  $\Phi$  es fácil definir una estructura de grupo abeliano en el conjunto de  $G$ -fibrados en rectas. Si  $\Phi : \text{pr}_2^*(L) \rightarrow \sigma^*(L)$  y  $\Phi' : \text{pr}_2^*(L') \rightarrow \sigma^*(L')$  son dos  $G$ -fibrados, definimos su producto tensorial como el fibrado en rectas  $L \otimes L'$  con la  $G$ -linealización dada por el isomorfismo natural:

$$\Phi \otimes \Phi' : \text{pr}_2^*(L \otimes L') = \text{pr}_2^*(L) \otimes \text{pr}_2^*(L') \rightarrow \sigma^*(L \otimes L) = \sigma^*(L) \otimes \sigma^*(L').$$

Donde usamos la propiedad

$$f^*(L \otimes L') = f^*(L) \otimes f^*(L').$$

El elemento neutro en este grupo es el fibrado trivial  $X \times \mathbb{A}^1$  cuya linealización está dada por el producto  $\sigma \times \text{id} : G \times X \times \mathbb{A}^1 \rightarrow X \times \mathbb{A}^1$ . Esta es llamada la trivialización lineal. La inversa de  $(L, \Phi)$  es igual a  $(L^{-1}, \Phi')$  con  $\Phi'$

definida como la inversa de la traspuesta de  $\Phi$ . Uno chequea que esto nuevamente satisface la condición de cociclo. La estructura de grupo abeliano que acabamos de definir induce una estructura de grupo en el conjuntos de clases de isomorfismo de  $G$ -fibrados en rectas. Denotamos este grupo por  $\text{Pic}^G(X)$ . Viene con el morfismo natural

$$\alpha : \text{Pic}^G(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$$

el cual se define olvidando la linealización.

De acuerdo a un teorema de Rosenlicht, para cualquier par de variedades algebraicas irreducibles  $X$  y  $Y$  sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $\bar{k}$ , el morfismo natural

$$\mathcal{O}(X)^* \otimes \mathcal{O}(Y)^* \rightarrow \mathcal{O}(X \times Y)^*$$

es sobreyectivo.

Para encontrar condiciones para la existencia de  $G$ -linealizaciones de una recta, debemos estudiar la imagen de el morfismo de olvido  $\alpha$ . Este consiste de clases de isomorfismo de fibrados en recta en  $X$  que admiten  $G$ -linealizaciones.

**Lema 1.1.** *Sea  $G$  un grupo algebraico afín y conexo, y sea  $X$  una  $G$ -variedad. Un fibrado en rectas  $L$  sobre  $X$  admite una  $G$ -linealización si y solo si existe un isomorfismo de fibrados en rectas  $\Phi : \text{pr}_2^*(L) \rightarrow \sigma^*(L)$ .*

*Proof.* Ya sabemos que esta condición es necesaria, así que mostramos que es suficiente. Asuma que tal isomorfismo existe. El problema es que puede no satisfacer la condición de cociclo. Interpretamos  $\Phi$  como una colección de isomorfismos  $\Phi_g : L \rightarrow g^*(L)$ . Donde  $g = e$ , el elemento neutro, obtenemos un isomorfismo  $\Phi_e : L \rightarrow L$ . Está dado por una función  $\phi \in \mathcal{O}(X)^*$ . Componiendo todos los  $\Phi_g$  con  $\Phi_e^{-1}$ , podemos asumir que  $\Phi_e = \text{id}_L$ . Ahora los isomorfismos  $\Phi_{gg'}$  y  $g'^*(\Phi_g) \circ \Phi_{g'}$  difieren por un automorfismo de  $L$ . Denotemoslo por  $F(g, g')$  para tener

$$\Phi_{gg'} \circ F(g, g') = g'^*(\Phi_g) \circ \Phi_{g'}$$

La condición de cociclo significa que  $F(g, g') \equiv \text{id}_L$ . Por el momento tenemos solo que  $F(e, g) = F(g, e) = \text{id}_L$  para cualquier  $g \in G$ . Identifiquemos el automorfismo  $F(g, g')$  con una función invertible en  $G \times G \times X$ . Por el teorema de Rosenlicht podemos escribir  $F(g, g')(x) = F_1(g)F_2(g')F_3(x)$ . Dado que  $F(e, g', x) \equiv 1$  y  $F(g, e, x) \equiv 1$ , las funciones  $F_2(g)F_3(x)$  y  $F_1(g)F_3(x)$  son constantes. Así  $F_3(x)$  es constante y por tanto  $F_1$  y  $F_2$  son constantes. Esto implica que  $F \equiv 1$ . Esto prueba la afirmación.  $\square$

Defina un morfismo  $\delta : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(G)$  por

$$\delta(L) = (\text{pr}_2^*(L) \otimes \sigma^*(L^{-1})) | G \times x_0,$$

donde  $x_0$  es un punto elegido en  $X$ . Suponga que  $\delta(L)$  es trivial. Por el lema anterior aplicado a  $M = \text{pr}_2^*(L) \otimes \sigma^*(L^{-1})$  obtenemos que  $M = \text{pr}_2^*(M | e \times X)$ . Pero la restricción de  $\sigma$  y  $\text{pr}_2$  a  $e \times X$  son iguales. Esto implica que  $M$  es trivial, por tanto existe un isomorfismo  $\Phi : \text{pr}_2^*(L) \rightarrow \sigma^*(L)$ . Por el lema,  $L$  admite una  $G$ -linealización. Esto prueba

**Teorema 1.** *Sea  $G$  un grupo algebraico afín y conexo actuando en una variedad normal  $X$ . Entonces la siguiente sucesión es exacta*

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\alpha) \rightarrow \text{Pic}^G(X) \xrightarrow{\alpha} \text{Pic}(X) \xrightarrow{\delta} \text{Pic}(G).$$

**Corolario 1.1.** *Bajo las hipótesis del teorema anterior, la imagen de  $\text{Pic}^G(X)$  en  $\text{Pic}(X)$  es de índice finito. En particular, para cualquier fibrado en rectas  $L$  en  $X$  existe un número  $n$  tal que  $L^{\otimes n}$  admite una  $G$ -linearización.*

*Proof.* Use el hecho de que para cualquier  $k$ -grupo algebraico  $G$  el grupo de Picard  $\text{Pic}(G)$  es finito.  $\square$

## 2 Resultado Principal

Ahora estamos listos para probar que cualquier acción algebraica en una variedad normal cuasi-proyectiva puede ser linealizada. Sea  $L$  un fibrado en rectas  $G$ -linealizado, sea  $V = \Gamma(X, L)$  su espacio de secciones, y sea  $G$  un grupo algebraico afín. El grupo  $G$  actúa natural y linealmente en  $V$  por la fórmula

$$\rho(g)(s)(x) = \bar{\sigma}(g, s(\sigma(g^{-1}, x))),$$

o, en notación simplificada

$$(g \cdot s)(x) = g \cdot s(g^{-1} \cdot x).$$

Sabemos que cualquier subespacio finito-dimensional  $W'$  de  $V$  está contenido en un subespacio finito-dimensional  $G$ -invariante  $W$  generado por traslaciones de la base de  $W'$ . Por lo que obtenemos una representación lineal

$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(W).$$

Asumamos que el sistema lineal  $W$  es libre de puntos base entonces  $W$  define un mapa regular  $\phi_W : X \rightarrow \mathbb{P}(W^*)$  por la fórmula

$$\phi_W(x) = \{s \in W : s(x) = 0\}.$$

Aquí identificamos un punto de  $\mathbb{P}(W^*)$  con un hiperplano en  $W$ . Notar que la igualdad  $s(x) = 0$  no depende de la trivialización. La representación (7.6) en  $W$  define una representación en  $W^*$  y la representación proyectiva inducida en  $\mathbb{P}(W^*)$ . Está dada por la fórmula

$$g \cdot H = g^{-1}(H),$$

donde  $H$  es un hiperplano en  $W$ . Ahora

$$\begin{aligned} \phi_W(g \cdot x) &= \{s \in W : s(g \cdot x) = 0\} \\ &= \{s \in W : g^{-1}s(g \cdot x) = 0\} = \{s \in W : (g^{-1} \cdot s)(x) = 0\} \\ &= g^{-1}(\phi_W(x)) = g \cdot \phi_W(x) \end{aligned}$$

Esto ahora muestra que el mapa  $\phi_W$  es  $G$ -equivariante.

Escogiendo una base  $(s_0, \dots, s_n)$  en  $W$  obtenemos un mapa racional  $G$ -equivariante

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad x \mapsto (s_0(x), \dots, s_n(x)).$$

Si el mapa racional definido por una base de  $W'$  es un encaje, entonces este mapa también es un encaje. Ahora sea  $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  un encaje de  $X$  como una subvariedad localmente cerrada del espacio proyectivo. Tomamos  $L = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ . Cuando  $n$  es suficientemente grande,  $L^{\otimes n} = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(n))$  admite una  $G$ -linearización. Sea  $W' \subset \Gamma(X, L^{\otimes n})$  la imagen de  $\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(n))$  bajo el mapa de restricción canónico  $\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(n)) \rightarrow \Gamma(X, L^{\otimes n})$ . Obviamente,  $W'$  es un sistema lineal, libre de puntos base y finito-dimensional. Este define un encaje de  $X$  en el espacio proyectivo el cual es la composición de  $i$  y un mapa de Veronese  $v_n : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{N+n}{n}-1}$  (obtenido del mapa de Veronese  $v_d : \mathbb{P}(k^{N+1}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Pol}_n(k^{N+1}))$  escogiendo bases). Reemplazando  $W'$  con un sistema lineal  $G$ -invariante  $W$  como arriba, obtenemos una linearización de la acción de  $G$  en  $X$ .

**Teorema 2.** *Sea  $X$  una variedad algebraica normal y cuasi-proyectiva, sobre el cual actúa un grupo algebraico irreducible  $G$ . Entonces existe un encaje  $G$ -equivariante  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ , donde  $G$  actúa sobre  $\mathbb{P}^n$  via su representación lineal  $G \rightarrow \mathrm{GL}_{n+1}$ .*

## References

[Dol03] Igor Dolgachev. *Lectures on Invariant Theory*. Number 296 in London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2003.

La referencia principal es [Dol03].