A_y: Cubrimientos Dobles.

- Sea X var alg. $B \geq 0$ divisor efectivo en X, $L \in Pic(X)$ con $s \in H^0(X, L^{\otimes 2})$ tq. $B = div(s)$. Considerando el espacio total de L como $T(L)$ junto con la proyección $T(L) \xrightarrow{\pi} X$ s define de forma natural una sección $\bar{s} \in H^0(T(L), \pi^*(L^{\otimes 2}))$. Definiendo $Y := div(\bar{s})$ y considerando $p := \pi|_Y : Y \longrightarrow X$ afirmamos que p es un morfismo finito de grado 2. (i.e. un cubrimiento doble) con valor de ramificación B y lugar de ramificación $R = p^{-1}(B)$

En particular, si $\{U_i\}_{i \in I}$ cubrimiento abierto afín de X que trivializa L con funciones de transición $h_{ij} \in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$ y cubriendo $T(L)$ con $\{U_i \times \mathbb{C}\}_{i \in I}$ la sección $s = (s_i)_{i \in I}$ tq. $s_i = h_{ij}^2 s_j$ y la sección $\bar{s} := (z_i^2 - s_i)_{i \in I}$, en efecto, notamos que:

$$\bar{s}_i = z_i^2 - s_i = (h_{ij} z_j)^2 - h_{ij}^2 s_j = h_{ij}^2 \bar{s}_j$$

entonces Y se ve localmente como $\{z_i^2 = s_i\}$, con lugar de ramificación dado por $\{z_i^2 = 0\}$ i.e. $R = p^{-1}(B)$. (pues $B \overset{loc}{=} \{s_i = 0\}$). En particular tenemos que $\mathcal{O}_Y(R) = p^*(L)$ $(= p^*(\mathcal{O}_X(B)))$

En el caso que X sea suave es fácil ver (usando el criterio Jacobiano) que las singularidades de Y están en los puntos de R que corresponden a singularidades de B.

Considerando $U_i = \operatorname{Spec}(A_i)$ (esquema afín) entonces:

$$p^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec}(B_i) \quad , \quad B_i = \frac{A_i[z_i]}{(z_i^2 - s_i)}$$

por lo tanto:

$$B_i = A_i \oplus z_i A_i \qquad (a)$$

como A_i-módulo. Esto nos dice que

$$p_*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X \oplus L^{\vee}.$$

En efecto, $p_*(\mathcal{O}_Y)$ es un fibrado vectorial de rg 2 sobre X (pues $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\text{rg } 1} Y \xrightarrow{2:1} X$). tenemos la inclusión usual $\mathcal{O}_X \hookrightarrow p_*(\mathcal{O}_Y)$, lo que nos do la secuencia

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \hookrightarrow p_*(\mathcal{O}_Y) \twoheadrightarrow F \longrightarrow 0 \qquad (b)$$

Donde $F \in \operatorname{Pic}(X)$, de (a) vemos que (b) splits: pues $\mathcal{O}_X \hookrightarrow p_*(\mathcal{O}_Y)$ corresponde a $A_i \hookrightarrow A_i \oplus z_i A_i$ y las proyecciones $B_i = A_i \oplus z_i A_i \twoheadrightarrow A_i$ están localmente bien definidos tal que obtenemos $p_*(\mathcal{O}_Y) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X$. , en particular, F corresponde localmente a $z_i A_i$. Por lo que una sección $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$ de F está dada por $\sigma_i z_i = \sigma_j z_j \Rightarrow \sigma_i = (h_{ij})^{-1} \sigma_j \Rightarrow F = L^{\vee}$.

Así podemos calcular directamente:

- fórmula de ramificación:

$$K_Y = p^*(K_X) + R = p^*(K_X \otimes L).$$

- fórmula de proyección:

$$p_*(K_Y) = K_X \oplus (K_X \otimes L).$$

- género geométrico:

$$p_g(Y) = h^0(Y, K_Y) = h^0(X, K_X) + h^0(X, K_X \otimes L)$$
$$= p_g(X) + h^0(X, K_X \otimes L)$$

- irregularidad:

$$q(Y) = h^1(Y, \mathcal{O}_Y) = h^1(X, \mathcal{O}_X) + h^1(X, L^\vee) = q(X) + h^1(X, L^\vee).$$

Ex 1: Considerar un cubrimiento doble $p: S \to \mathbb{P}^2$ con valor de ramificación B una curva suave de grado $2d$: en general se denomina como plano doble. calcular: $p_g(S), K_S^2, q(S), \chi_{Top}(S)$

Dem: tenemos $Y = S$, $X = \mathbb{P}^2$, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$, $K_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$

$$p_g(S) = \cancelto{0}{p_g(\mathbb{P}^2)} + h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-3))$$
$$= \binom{2+d-3}{2} = \binom{d-1}{2}$$ ver apunte geo. alg.

$$K_S = p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-3)) \Rightarrow K_S^2 = \deg(p) \cdot (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-3))^2$$
$$= 2(d-3)^2$$ Bezout

$$q(S) = \cancelto{0}{q(\mathbb{P}^2)} + \cancelto{0}{h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d))} = 0$$

$$\chi(S,\mathcal{O}_S) = 1 - q(S) + p_g(S)$$
$$= 1 + \binom{d-1}{2}$$
$$= 1 + \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{1}{2}(d^2 - 3d + 4)$$

Noether $\Rightarrow$ $$\chi(S,\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}\left(K_S^2 + \chi_{Top}(S)\right)$$

$$\Rightarrow (d^2 - 3d + 4) = \frac{1}{6}\left(2(d-3)^2 + \chi_{Top}(S)\right)$$

$$\Rightarrow \chi_{Top}(S) = 2(2d^2 - 3d + 3) \qquad \square$$

Eg. $(d=3)$ tenemos que $K_S = p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(0)) = \mathcal{O}_S$

$\Rightarrow K_S^2 = 0$.

$p_g(S) = \binom{2}{2} = 1$. $q(S) = 0$, $\chi_{Top}(S) = 24$

en particular, S es una superficie K3.