Ayudantía 2 – Geometría Compleja (MAT451, 2025-2)

Autor: Benjamín Vega, Profesores: Pedro Montero, Roberto Villaflor.

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Problema 1.

Considere la cuadrica suave $\mathbf{Q} := \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{P}^3 : \ x_0x_3 - x_1x_2 = 0\} \subseteq \mathbf{P}^3$ y sea $p = [0,0,0,1] \in \mathbf{Q}$. Resuelva explicitamente la aplicación racional

$$\pi_p : \mathbf{Q} \dashrightarrow \mathbf{P^2}, \quad [x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_0, x_1, x_2]$$

y deduzca que $\mathrm{Bl}_\mathrm{p}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \cong \mathrm{Bl}_{q,r}(\mathbf{P})^2$, donde $\mathbf{Q} \cong \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ vía el incrustamiento de Segre.

Demostración. Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^2$ el grafo de π. Notemos que el punto $p = [0,0,0,1]$ es una indeterminación de la aplicación. Esto se resuelve haciendo un blow-up de $\mathbf{Q}$ en p dado por $\pi_1 : \mathrm{Bl}_p(\mathbf{Q}) = \overline{\Gamma} \to \mathbf{Q}$. El divisor excepcional de $\mathrm{Bl}_p(\mathbf{Q})$ está dado por $E_p := \pi_1^{-1}(p) \cong \mathbf{P}^1$. Por otro lado, al resolver la proyección obtenemos que la inversa (racional) de π está dada por

$$\pi_p^{-1} : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{Q}, \quad [z_0, z_1, z_2] \mapsto [z_0^2, z_0z_1, z_0z_2, z_1z_2].$$

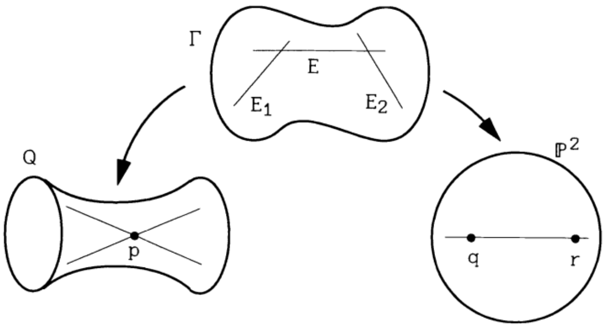
Esta aplicación está bien definida en $\{z_0 \neq 0\}$, mientras que en $z_0 = 0$ posee dos puntos de indeterminación dados por $q = [0,1,0]$ y $r = [0,0,1]$. En la carta afín $U_{z_1} = \{z_1 \neq 0\}$ tendremos que $\{z_0^2, z_0, z_0z_2, z_2\}$ generan el ideal $\langle z_0, z_2 \rangle$ de q (resp. para r). Así, el blow-up se realiza en dos puntos de $\mathbf{P}^2$ y así $\mathrm{Bl}_{q,r}(\mathbf{P}^2) \subseteq \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^3$. En particular, decimos que

$$f : \overline{\Gamma} \subseteq \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^2 \to \mathrm{Bl}_{q,r}(\mathbf{P}^2) \subseteq \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^3$$
$$([x_0, x_1, x_2, x_3], [z_0, z_1, z_2]) \mapsto ([z_0, z_1, z_2], [x_0, x_1, x_2, x_3])$$

es un isomorfismo. Para esto basta hacerlo en un abierto denso y en efecto, pues en el complemento del conjunto excepcional de $\overline{\Gamma}$ tendremos que $x_0x_3 = x_1x_2$ y $[x_0, x_1, x_2] = [z_0, z_1, z_2]$ y por tanto en el complemento de $V(x_0)$ tendremos que

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] = [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3] = [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2] = [z_0^2, z_0z_1, z_0z_2, z_1z_2]$$

por lo que conseguimos las ecuaciones correctas para f en su imagen dentro de $\mathrm{Bl}_{q,r}(\mathbf{P}^2)$. De forma inversa, en el complemento del conjunto excepcional de $\mathrm{Bl}_{q,r}(\mathbf{P})$ tendremos que $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (z_0^2, z_0z_1, z_0z_2, z_1z_2)$ de donde obtenemos que $x_0x_3 = x_1x_2$ y $(z_0, z_1, z_2) = (x_0, x_1, x_2)$ en $\{z_0 \neq 0\}$ (vía devolverse en el cálculo anterior).



□

Problema 2.

Resuelva la *involución de Cremona*:

$$\varphi : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2, \quad [X, Y, Z] \mapsto [YZ, XZ, XY].$$

Demostración. Notemos que la involución presenta puntos indeterminados en $p = [1,0,0]$, $q = [0,1,0]$ y $r = [0,0,1]$. Para resolver estas indeterminaciones, extendemos $\mathbf{P}^2$ mediante hacer blow-up en estos tres puntos. En la carta afín $U_x = \{x \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2$, podemos sin pérdida de generalidad considerar $x = 1$ y con coordenadas (y, z), el blow-up se define como:

$$\mathrm{Bl}_q(U_x) = \{((y,z),[s,t]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid yt = zs\}.$$

En cartas locales:

- **Carta** U_s, $s \neq 0$, fijamos $s = 1$: Obtenemos que $z = yt$,
- **Carta** U_t, $t \neq 0$, fijamos $t = 1$: Obtenemos que $y = sz$,

con la curva excepcional $E_1 \cong \mathbf{P}^1$ que corresponde a $y = z = 0$, parametrizada por $[s : t]$. Los otros dos casos en las cartas $U_y = \{Y \neq 0\}$ y $U_Z = \{Z \neq 0\}$ son análogos (con E_2 y E_3 los conjuntos excepcionales de q y r respectivamente). Luego la transformación φ se extiende a un automorfismo $\tilde{\varphi} : \mathrm{Bl}_{p,q,r}(\mathbf{P^2}) \to \mathbf{Bl}_{p,q,r}(\mathbf{P}^2)$ de la siguiente manera: En cartas afines donde φ está definida, por ejemplo, en la carta $x = 1$ con coordenadas (y, z):

$$\varphi([1, y, z]) = [yz, z, y] = [y, 1, 1/z]$$

vemos su comportamiento cerca de la curva excepcional E_1,

- En U_s: como $s \neq 0$ podemos suponer $s = 1$ y entonces $\tilde{\varphi}(y, t) = [yt, t, 1]$.
- En U_t: Como $t \neq 0$ podemos suponer $t = 1$ y entonces $\tilde{\varphi}(s, z) = [sz, 1, s]$.

Este mismo desarrollo análogo se realiza para las tres cartas afines dadas por U_X, U_Y y U_Z, y luego los pegamos en la variedad $\widetilde{\mathbf{P}^2} = \mathrm{Bl}_{p,q,r}(\mathbf{P}^2)$. Esto resuelve la involución extendiendo φ en $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\mathbf{P}^2} \to \widetilde{\mathbf{P}^2}$.

$\square$