Ayudantía 1 (MAT451)

Pedro Montero & Roberto Villaflor

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

A menos que se indique lo contrario, S denotará una superficie proyectiva suave e irreducible definida sobre el cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos.

Problema 1

El objetivo de este ejercicio es realizar cálculos explícitos de teoría de intersección en una cuádrica suave $Q \subseteq \mathbf{P}^3$. Para ello, recuerde que el incrustamiento de Segre induce un isomorfismo

$$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\simeq} Q \subseteq \mathbf{P}^3,\ ([x,y],[u,v]) \mapsto [xu, xv, yu, yv],$$

donde $Q = \{[x_0,x_1,x_2,x_3] \in \mathbf{P}^3,\ x_0x_3 - x_1x_2 = 0\}$, y recuerde que $\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \cong \mathbf{Z}[\Gamma_1] \oplus \mathbf{Z}[\Gamma_2] \cong \mathbf{Z}^2$ donde $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1}(\Gamma_1) \cong \mathrm{pr}_1^*\,\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(1) =: \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1}(1,0)$ y donde $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1}(\Gamma_2) \cong \mathrm{pr}_2^*\,\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(1) =: \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1}(0,1)$.

(a) Probar que si $C \simeq m\Gamma_1 + n\Gamma_2$ y $C' \simeq m'\Gamma_1 + n'\Gamma_2$ entonces $C \cdot C' = mn' + nm'$.

(b) Sea $C \in |\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1}(a,b)|$ una curva suave e irreducible, con $a, b \in \mathbf{N}^{\geq 1}$. Calcule $g(C)$.

Problema 2

El objetivo de este ejercicio es describir cómo se modifican los números de auto-intersección de curvas al realizar múltiples blow-ups. Para ello, considere una superficie S y $C \subseteq S$ una curva irreducible con $C^2 = n \in \mathbf{Z}$.

(a) Sea $\varepsilon : \widetilde{S} \to S$ el blow-up de $p \in S$, y sea $\widetilde{C} \subseteq \widetilde{S}$ la transformada estricta de C por ε. Calcule $\widetilde{C}^2$ y $g(\widetilde{C})$.

Indicación: La respuesta depende según si $p \in C$ o $p \notin C$, y de $m = \mathrm{mult}_p(C)$ en el caso en que $p \in C$.

(b) Demuestre que existe una sucesión finita de blow-ups $S' \to S$ tal que la transformada estricta $C' \subseteq S'$ de C es una curva suave.