Tarea 3 – Variedades Diferenciables (MAT430)

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Mateo Hidalgo

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega: **Hasta el 19 de Junio de 2025 a las 16:05 horas.**

Todas las variedades Riemannianas (M, g) serán dotadas de su conexión de Levi-Civita ∇. Debe elegir 4 de los 5 problemas para desarrollar.

1. **Métricas Riemannianas (25 pts).** Sea $\mathbf{B}^n := \{x \in \mathbf{R}^n,\ \|x\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 < 1\}$ la bola unitaria y sea $\mathbf{H} := \{x \in \mathbf{R}^n,\ x^1 > 0\}$ el semi-plano superior. Considere la función

$$f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{H},\ x \mapsto t + \frac{2(x-t)}{\|x-t\|^2} \text{ donde } t := (-1, 0, \ldots, 0).$$

   Pruebe que f es un difeomorfismo y que induce una isometría entre $(\mathbf{B}^n, 4\frac{\sum_{i=1}^n (\mathrm{d}x^i)^2}{(1-\|x\|^2)^2})$ y $(\mathbf{H}, \frac{\sum_{i=1}^n (\mathrm{d}x^i)^2}{(x^1)^2})$.

2. **Conexión de Levi-Civita (25 pts).**

   Sea (M, g) una variedad Riemanniana y sea $\widetilde{g} := e^{2u} g$ donde $u \in \mathscr{C}^\infty(M)$ es una función suave. Demuestre que si $\widetilde{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita asociada a $\widetilde{g}$ y si $X, Y \in \Gamma(TM)$ entonces

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathscr{L}_X(u) Y + \mathscr{L}_Y(u) X - g(X, Y) \operatorname{grad}_g(u),$$

   donde $\operatorname{grad}_g(u) \in \Gamma(TM)$ es el campo vectorial **gradiente de** u, obtenido como el g-dual de $\mathrm{d}u \in \Omega^1(M)$ (i.e., determinado por la condición $g(\operatorname{grad}_g(u), X) = (\mathrm{d}u)(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{L}_X(u)$ para todo $X \in \Gamma(TM)$).

3. **Geodésicas (25 pts).** Considere $\mathbf{H} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y > 0\}$ con la **métrica de Poincaré** $g = \frac{1}{y^2}\left((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2\right)$. Determine todas las geodésicas de $(\mathbf{H}, g)$.

   Indicación: Debería obtener que hay dos tipos de geodésicas, las dadas por semicirculos parametrizados con rapidez constante, es decir

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R \tanh t \\ y(t) = R \operatorname{sech} t = \frac{R}{\cosh t} \end{cases} \quad (\textit{para cualquier } x_0 \in \mathbf{R}, R > 0).$$

   y las dadas por semirectas parametrizadas a rapidez constante, es decir

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = y_0 e^t \end{cases} \quad (\textit{para cualquier } x_0 \in \mathbf{R}, y_0 > 0)\,.$$

4. **Campos de Killing (25 pts).** Considere $\mathbf{T}^2 \subseteq \mathbf{R}^3$ con la métrica $g = (\mathrm{d}\theta)^2 + (2 + \cos(\theta))^2 (\mathrm{d}\varphi)^2$.

   Determine las ecuaciones de Killing para

$$X = P(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} + Q(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \in \Gamma(T\mathbf{T}^2)$$

   ¿Existen campos de Killing constantes en el toro $(\mathbf{T}^2, g)$?

5. **Curvatura (25 pts).** Considere $(\mathbf{R}^n, g_{\text{can}})$ y sea $\widetilde{g} := e^{2u} g_{\text{can}}$ con $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Defina $\sigma_{ij} := \operatorname{Vect}_{\mathbf{R}}(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \subseteq T_p\mathbf{R}^n$ plano vectorial, para todo $p \in \mathbf{R}^n$, y sea $\widetilde{K}$ la curvatura seccional asociada a la métrica $\widetilde{g}$. Pruebe que

$$\widetilde{K}(\sigma_{ij}) = -e^{-2u} \left(\partial_{ii} u + \partial_{jj} u + \sum_{k \neq i,j} (\partial_k u)^2 \right),$$

   donde $\partial_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ y $\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial x^k}$. Utilice lo anterior para describir explícitamente el tensor de curvatura de Riemann $R(X, Y, Z, W)$ para la bola unitaria $(\mathbf{B}^n, \frac{4}{(1-\|x\|^2)^2} \sum_{i=1}^n (\mathrm{d}x^i)^2)$.

Bonus (15 pts). Sea (M, g) variedad Riemanniana. Probar que $\Gamma_{ij}^j = \frac{\partial}{\partial x^i}(\ln \sqrt{\det(g_{ij})})$.

Indicación: Puede usar directamente, sin demostración, la fórmula de Jacobi*: si $A : \mathbf{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}),\ t \mapsto A(t)$ es una función suave entonces $\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \det(A(t)) \operatorname{tr}(A(t)^{-1} A'(t))$.*