Tarea 2 – Variedades Diferenciables (MAT430)

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Mateo Hidalgo

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega: **Hasta el 7 de mayo de 2025 a las 23:59 horas.**

Todas las variedades diferenciables y funciones entre ellas serán de clase $\mathscr{C}^\infty$. Además, las supondremos espacios topológicos de Hausdorff y σ-compactos.

1. **Flujos de campos vectoriales (20 pts).** Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y sea $X \in \Gamma(TM)$ un campo vectorial completo con flujo $(\varphi_t : M \xrightarrow{\simeq} M)_{t\in\mathbf{R}}$. Entonces:
   (a) Pruebe que el **pushforward** $f_*X := (f^{-1})^*X \in \Gamma(TM)$ es un campo vectorial completo y que su flujo asociado está dado por $\psi_t = f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$.
   (b) Sean $X, Y \in \Gamma(TM)$ campos vectoriales completos, con flujos $(\varphi_t)_{t\in\mathbf{R}}$ y $(\psi_s)_{s\in\mathbf{R}}$, respectivamente. Use el ítem (a) y el hecho que $\mathscr{L}_X(Y) = [X, Y]$ para deducir que:
   $$[X, Y] = 0 \text{ si y sólo si } \psi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \psi_s \text{ para todos } s, t \in \mathbf{R}.$$

2. **Teorema de Frobenius (20 pts).** Considere coordenadas (x, y, z, t) en $\mathbf{R}^4$ y los campos vectoriales
   $$X := t\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial t},\ Y := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t}.$$
   Determine una subvariedad maximal $M \subseteq \mathbf{R}^4$ tal que $\mathscr{D} := \langle X, Y\rangle \subseteq T\mathbf{R}^4$ sea una distribución de rango 2. Determine si $\mathscr{D}$ define una foliación en M.

3. **Formas diferenciales (20 pts).** Sean $\omega \overset{\text{loc}}{=} \sum_{i=1}^n f_i\ dx^i \in \Omega^1(M)$, $X \overset{\text{loc}}{=} \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(TM)$ y sea $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Pruebe que $\mathscr{L}_X(\omega) \overset{\text{loc}}{=} \sum_{i,j=1}^n \left(X^j \frac{\partial f_i}{\partial x^j} + f_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right) dx^i$ y que $\mathscr{L}_{fX}\omega = f\mathscr{L}_X\omega + df \wedge \iota_X\omega$.

4. **Orientación (20 pts).** Una **superficie de Riemann** es un espacio topológico de Hausdorff σ-compacto S tal que para todo punto $p \in S$ existe una vecindad abierta $p \in U_p$ y un homeomorfismo $\varphi_p : U_p \to V_p \subseteq \mathbf{C}$, donde V_p es un abierto del plano complejo, y donde cada vez que $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ se tiene que el cambio de cartas
   $$\varphi_q \circ \varphi_p^{-1} : \varphi_p(U_p \cap U_q) \xrightarrow{\simeq} \varphi_q(U_p \cap U_q)$$
   es una función holomorfa con inversa holomorfa. Pruebe que toda superficie de Riemann es una variedad real de dimensión 2 orientable.

5. **Teorema de Stokes (20 pts).** Considere en $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ la 2-forma diferencial
   $$\omega = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy)$$
   (a) Verifique que $d\omega = 0$.
   (b) Sea $i : \mathbf{S}^2 \hookrightarrow \mathbf{R}^3$ la inclusión de la esfera unitaria en $\mathbf{R}^3$. Calcule, usando coordenadas esféricas[1], la integral $\int_{\mathbf{S}^2} i^*\omega$ y deduzca que $[\omega] \neq 0$ en $\mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})$.

Bonus (15 pts). Sea $\mathrm{vol} := dx \wedge dy \wedge dz$ la forma de volumen de $\mathbf{R}^3$, y sea $S \subseteq \mathbf{R}^3$ una superficie compacta sin borde. Así, S encierra un abierto acotado $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ tal que $\partial\Omega = S$. Para $p \in S$, denotamos por $\nu(p)$ al vector normal exterior unitario de S saliendo del punto p, y definimos la 2-forma de área $\sigma \in \Omega^2(S)$ como $\sigma(X, Y) := \mathrm{vol}(\nu(p), X, Y)$ para todos $X, Y \in T_pS$ y definimos $\mathrm{Area}(S) := \int_S \sigma$.

(B1) Sea $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$. Calcular $d\omega$.

(B2) Sea (V_1, V_2) una base ortonormal directa[2] de T_pS. Probar que $\omega(V_1, V_2) \leq \|p\|\sigma(V_1, V_2)$.

(B3) Deducir que si $r \in \mathbf{R}^{>0}$ es tal que $\Omega \subseteq B(0, r)$ entonces $\mathrm{vol}(\Omega) \leq \frac{r}{3}\,\mathrm{Area}(S)$.

---

[1] Recuerde que en coordenadas esféricas $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[\times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ se tiene $x = \cos(\varphi)\cos(\theta)$, $y = \cos(\varphi)\sin(\theta)$, $z = \sin(\varphi)$.

[2] Recordar que (V_1, V_2) es una base directa si $(\nu(p), V_1, V_2)$ es una base directa de $\mathbf{R}^3$.