# Tarea 1 – Variedades Diferenciables (MAT430)

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Mateo Hidalgo

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega: **Hasta el 16 de abril de 2025 a las 23:59 horas.**

Todas las variedades diferenciables y funciones entre ellas serán de clase $\mathscr{C}^\infty$. Además, las supondremos espacios topológicos de Hausdorff y $\sigma$-compactos.

1. **Sub-variedades de $\mathbf{R}^n$ (20 pts).** Considere la función $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por
$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1.$$
Determinar el conjunto $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ de puntos $p \in \mathbf{R}^2$ tales que $M := f^{-1}(f(p))$ es una subvariedad de $\mathbf{R}^2$.

2. **Submersiones, Inmersiones e Incrustamientos (20 pts).** Probar que para toda matriz invertible $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ se tiene que el diferencial de la aplicación determinante $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ está dado por
$$(d_M \det)(A) = \det(M)\,\mathrm{tr}(M^{-1}A).$$
Deducir que si $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \text{ tal que } \det(M) = 1\}$ entonces $\mathrm{rg}(d_M \det) = 1$ y concluir que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ es una variedad diferenciable de dimensión $n^2 - 1$.

3. **Variedades diferenciables (20 pts).** Probar que la esfera $\mathbf{S}^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ como subvariedad de $\mathbf{R}^{n+1}$ es difeomorfa la $\mathbf{S}^n$ como variedad abstracta construída usando las proyecciones esteográficas desde $N = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{S}^n$ y $S = (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{S}^n$.

4. **Fibrados vectoriales (20 pts).** La **banda de Möbius** se define como el cociente de $\mathbf{R}^2$ por la relación de equivalencia
$$(x, t) \sim (x + 1, -t) \text{ para todos } (x, t) \in \mathbf{R}^2,$$
y definimos por $\pi : M \to \mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong \mathbf{S}^1 \subseteq \mathbf{C}$, $[(x, t)] \mapsto [x] = e^{2\pi i x}$ la proyección en la primera coordenada. Probar que $\pi : M \to \mathbf{S}^1$ define un fibrado vectorial de rango 1 sobre $\mathbf{S}^1$ y que $\pi$ **no** es el fibrado trivial.

   *Indicación: Sea $0_M : \mathbf{S}^1 \to M$ la sección nula. Analizar la topología de $M \setminus 0_M(\mathbf{S}^1)$.*

5. **Campos vectoriales y Derivada de Lie (20 pts).** Considere los campos de vectores $X$ e $Y$ en $\mathbf{R}^3$ dados por
$$X(x, y, z) = (2z - y)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y(x, y, z) = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}.$$
Calcular el corchete de Lie $[X, Y]$. Verificar que la restricción de los campos $X$, $Y$ y $[X, Y]$ a la esfera $\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ tal que } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ son campos vectoriales en $\mathbf{S}^2$.

**Bonus (10 pts).** Probar la **identidad de Jacobi**, es decir, para todos $X, Y, Y \in \Gamma(TM)$ se tiene que
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$