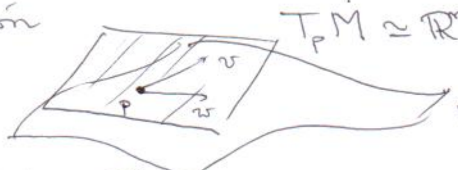
MAT430 : Variedades Diferenciables

Referencias : ① "Riemannian Geometry" Gallot - Hulin - Lafontaine
② "Geometry, Topology and Physics", M. Nakahara

§0. Motivación : En 1854, Riemann introduce la Geo. Riemanniana en su tesis de Habilitación

$T_pM \simeq \mathbb{R}^n$ "espacio tangente"



M "variedad diferenciable", $M \underset{loc}{\simeq} \mathbb{R}^n$

En cada $T_pM \simeq \mathbb{R}^n$ hay una noción de producto interno

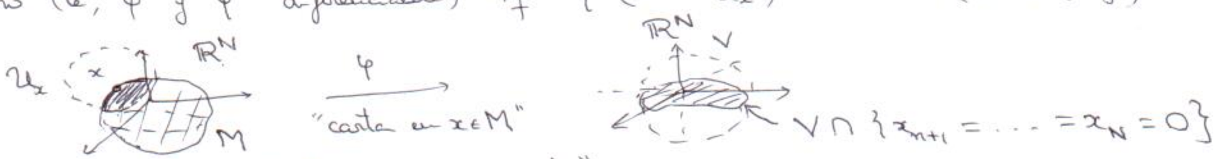
$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v,w) \longmapsto g_p(v,w) \text{ "="} \langle v,w\rangle_p$$

que varíe de forma diferenciable al mover $p \in M$ $\rightsquigarrow$ (M,g) "variedad Riemanniana"

Parte I : Variedades, Campos Vectoriales y Formas diferenciales.

§1. Subvariedades de $\mathbb{R}^N$:

Def : Una subvariedad de dim n de $\mathbb{R}^N$ es $M \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que "$\forall x \in M$, $\exists\, x \in \mathcal{U}_x \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $V \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, junto con $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow[\mathcal{C}^\infty]{\sim} V$ difeomorfismo (ie, φ y φ^{-1} diferenciable) tq $\varphi(M \cap \mathcal{U}_x) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$"



Notación : "$M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ subvariedad"

Eg : $S^2 = \{x^2+y^2+z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Si $z>0$, $x^2+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Así, $\varphi(x,y,z) := (x, y, z - \sqrt{1-x^2-y^2})$ cumple $\varphi|_{S^2 \cap \{z>0\}} = (x,y,0)$, y de manera análoga se analiza $z<0$, $\pm x > 0$, $\pm y > 0$.

Similar : $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ subvar. de dim n.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Si $f : \mathcal{U} \underset{\text{abierto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ es suave (ie, f a $\mathcal{C}^\infty$) entonces el grafo $M := \{(x, f(x)),\ x \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} \simeq \mathbb{R}^N$ es una subvar. de dim n.

Eg : El espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1 \text{ y } x_0 > 0\}$ es una subvar de dim n.

§2. Vectores tangentes

Sea $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ subvariedad, y sea $p \in M$ fijo.

Def : Decimos que $X \in \mathbb{R}^N$ es un vector tangente a M en $p \in M$ si : "$\exists\, c :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M \subseteq \mathbb{R}^N$ curva de clase $\mathcal{C}^1$ tq $c(0) = p$ y $c'(0) = X$"

Escribimos $T_pM := \{X \in \mathbb{R}^N,\ X \text{ tangente a } M \text{ en } x\}$.

Eg : ① $T_p\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$ (considerar rectas!)

(2) Si $M = x_0 + V$ espacio afín de $\mathbb{R}^N$, $T_pM = V$ $\forall p \in M$

(3) Sea $\varphi : \mathcal{U} \underset{\text{abierto}}{\subseteq} \mathbb{R}^N \xrightarrow{\sim} V \underset{\text{abierto}}{\subseteq} \mathbb{R}^N$ un difeomorfismo.

Si $c(t) \in M \cap \mathcal{U}$ $\forall t$ y $c(0) = p \in M$

$\Rightarrow \varphi(c(t)) \in \varphi(M) \cap V$ y por regla de la cadena $\frac{d}{dt}\{\varphi(c(t))\}\Big|_{t=0} = (d_p\varphi)(c'(0))$

Así, $X \in T_pM \iff (d_p\varphi)(X) \in T_{\varphi(p)}(\varphi(M))$

ie, $d_p\varphi$ induce una biyección $T_pM \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(p)}(\varphi(M))$

⚠ En part, si φ es una carta local: $T_pM = (d_p\varphi)^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$

Dado que $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ es un $\mathbb{R}$-ev, T_pM es un $\mathbb{R}$-ev de $\dim_{\mathbb{R}} T_pM = n$.

§3. Submersiones, Inmersiones e Incrustamientos

La forma más típica de construir ejemplos de $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ es "usando ecuaciones" y "usando parametrizaciones". Más formalmente:

Def: $f : \mathcal{U} \underset{\text{abierto}}{\subseteq} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-n}$ función suave es una submersión si el diferencial (o matriz jacobiana) $d_pf : \mathbb{R}^N \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ es sobreyectiva $\forall p \in \mathcal{U}$.

Teorema: Sea $f : \mathcal{U} \overset{\text{ab}}{\subseteq} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-n}$ submersión y sup. que $b \in \mathbb{R}^{N-n}$ es tal que $f^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{U},\ f(x) = b\}$ es no-vacío. Entonces:
$M := f^{-1}(b) \subseteq \mathbb{R}^N$ es una subvar de dim n y $\forall p \in M$ se tiene $T_pM = \ker(d_pf)$

Dem: Por el Teo del rango, $\ker(d_pf) \simeq \mathbb{R}^n$. Sea $F \simeq \mathbb{R}^{N-n}$ subev de $\mathbb{R}^N$ tq $\mathbb{R}^N = \ker(d_pf) \oplus F$, y luego $d_pf|_F : F \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{N-n}$ isomorfismo, $\forall p \in f^{-1}(b) \subseteq M$.
Veamos que $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} \simeq \mathbb{R}^N$, $p + (u,v) \mapsto (u, f(p+(u,v)) - b)$ define una carta local para $f^{-1}(b)$ cerca de $p \in f^{-1}(b)$, donde $(u,v) \in \ker(d_pf) \oplus F \simeq \mathbb{R}^N$:
Por definición, $(d_p\varphi)(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{u}, (d_pf)(\tilde{v}))$ y luego es un isomorfismo. Por el Teo de la Función Inversa, φ es un difeom. en una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^N$ de $p \in f^{-1}(b)$.
Además, por def de φ, $\varphi(f^{-1}(b) \cap V) \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap V$, ie, es una carta local, y $T_p(f^{-1}(b)) = (d_p\varphi)^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\}) \overset{\text{def}}{=} \ker(d_pf)$ ∎

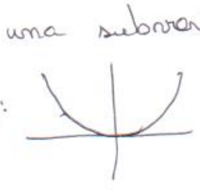
Eg: (1) $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2 = x_0^2 + \dots + x_n^2$ cumple $d_xf = (\nabla f)(x) = (2x_0, \dots, 2x_n)$ y luego f es una submersión en $\mathcal{U} := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. En part, $S^n \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(1) \cap \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ subvar

(2) $\mathbb{H}^n = f^{-1}(1) \cap \mathcal{U}$ con $\mathcal{U} = \{x_0 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y $f(x) = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$

Def: $f : \mathcal{U} \underset{\text{ab}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ función suave es una inmersión si $d_pf : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ es inyectiva para todo $p \in \mathcal{U}$.

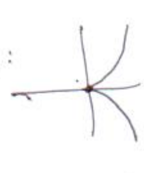
⚠ Intuitivamente, f inmersión "separa direcciones tangentes" pero $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^N$ no siempre es una subvariedad. Por ejemplo:

(1) OK:



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (t, t^2)$

(2) NO:



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (t^2, t^3)$

(3) **OK** pero $f(\mathcal{U})$ no es subvar:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$

Def: $f : \mathcal{U} \underset{\text{ab}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es un encajamiento ("embedding") si f es una inmersión y $\mathcal{U} \xrightarrow[f]{\sim} f(\mathcal{U})$ es un homeomorfismo.

De manera similar al caso de submersiones, se prueba que:

Teorema: Sea $f : \mathcal{U} \underset{\text{ab}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ función suave.

① Si f es inyectiva y propia (ie, f^{-1}(compacto) es compacto), entonces si f es una inmersión $\Longrightarrow$ f es un encajamiento.

② Si f es un encajamiento, entonces $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^N$ subvar. de dim n.

§4. Variedades diferenciables:

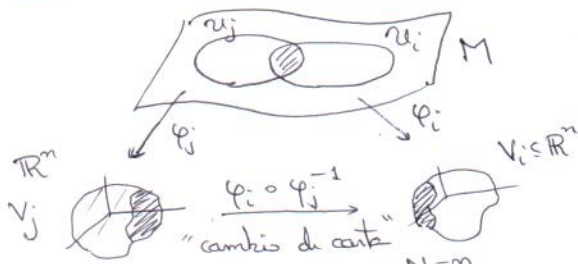
Def (Whitney 1936): Sea M un esp. topológico. Un atlas $\mathcal{C}^\infty$ en M es:

① Un cubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ de M.

② Homeomorfismos $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} V_i \overset{\text{abierto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ tal que $\forall i, j$

$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \xrightarrow{\sim} \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$

es un difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$.



Ej: Sea $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ subvar (ie, $\forall p \in M$, $\exists\, \varphi_p : \mathcal{U}_p \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ con $\varphi_p(\mathcal{U}_p \cap M) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}$) y sea $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, y) \longmapsto x$.

Entonces, $\{\pi \circ \varphi_p, \mathcal{U}_p \cap M\}_{p \in M}$ es un atlas para M.

Obs: ① Dos atlas $\{\varphi_i\}_{i \in I} \sim \{\psi_j\}_{j \in J}$ son equivalentes si su unión es un atlas.

② Si reemplazamos $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$ y "difeo" por "holomorfo", decimos que M es una variedad compleja.

Def (Whitney 1936). Una variedad (diferenciable) M es:

① Un esp. topológico (conexo, usualmente) de Hausdorff (ie, podemos separar puntos usando abiertos disjuntos) y numerable al infinito (ie, unión numerable de compactos).

② Una clase de equivalencia de atlas $\mathcal{C}^\infty$ en M, con cartas locales a $\mathbb{R}^n$.

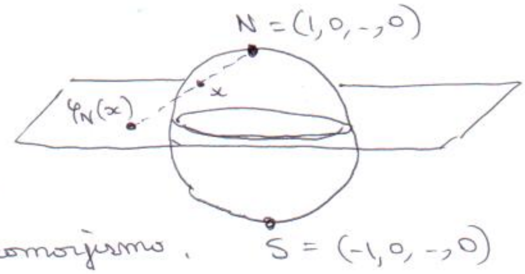
En tal caso, $n := \dim(M)$ es la dimensión de M.

Ejemplos:

① La esfera $S^n \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$

con $\varphi_N(x) = \dfrac{1}{1 - x_0}(x_1, \dots, x_n)$ y $\varphi_S(x) = \dfrac{1}{1 + x_0}(x_1, \dots, x_n)$

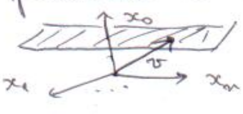
es tal que $(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}(x_1, \dots, x_n)$ difeomorfismo.



② El espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{RP}^n = \{$rectas vectoriales $0 \in \ell \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\}$.

Los vectores $v = (x_0, \dots, x_n) \neq 0$ y $\lambda v = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ con $\lambda \neq 0$, determinan la misma recta $[v] = [x_0, \dots, x_n] = [\lambda x_0, \dots, \lambda x_n]$.

Si pertenecen a $\mathcal{U}_0 := \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, podemos reescalar para que $x_0 = 1$



$\{x_0 = 1\} \simeq \mathbb{R}^n$, $\varphi_0 : \mathcal{U}_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$, $[x] \longmapsto \frac{1}{x_0}[x]$. Similar: $\mathcal{U}_i := \{x_i \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^n$.

⚠ En este tipo de ejemplos, donde damos "cartas locales" $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow[\text{biy}]{\sim} V_i \subseteq \mathbb{R}^n$, con $M = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, definimos la topología en M usando las φ_i: $\mathcal{U} \subseteq M$ es abierto si $\varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i) \subseteq V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto $\forall i \in I$.

③ De manera análoga se define el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{CP}^n$ como $\{$rectas vectoriales $0 \in \ell \subseteq \mathbb{C}^{n+1}\}$. Es una variedad (real) de $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = 2n$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ (ver §5 abajo)

④ Sean $0 \leq r \leq n$ enteros. Se define la variedad Grassmanniana como

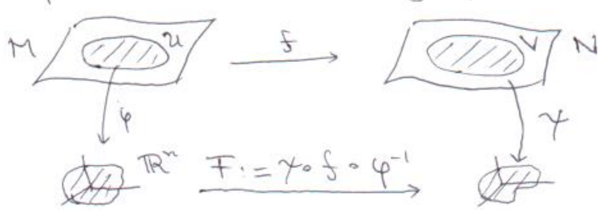
$$Gr(r,n) := \{ \text{subesp. } \Lambda \simeq \mathbb{R}^r \text{ de } \mathbb{R}^n \}$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$* Probar que $Gr(r,n)$ es una variedad de dimensión $r(n-r)$.

⑤ Subvariedades: Decimos que $X^n \subseteq M^N$ es una subvariedad si para cada carta local $\varphi : \mathcal{U} \subseteq M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ de M, con $\dim(M) = N$, se tiene que $\varphi(X \cap M)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^N$ (en el sentido clásico) de $\varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^N$. Así, $\varphi|_X$ define una carta en X, con $n := \dim(X) \leq N$.

§5. Funciones suaves

Def: Una función continua entre dos variedades $f : M^n \longrightarrow N^p$ es suave si para todo par de cartas locales $\varphi : \mathcal{U} \subseteq M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \subseteq N \longrightarrow \mathbb{R}^p$



"F es la representación de f en las carta $\mathcal{U} \subseteq M$, $V \subseteq N$"

la función $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap f^{-1}(V)) \underset{\text{ab}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \underset{\text{ab}}{\subseteq} \mathbb{R}^p$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Ejemplos: ① $f :]a,b[\longrightarrow M^n$ es suave si $\forall$ carta $\varphi : \mathcal{U} \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ la composición $\varphi \circ f :]a,b[\to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (F_1(t), \dots, F_n(t))$ suave, ie, cada F_i es suave.

② $f : M^n \to \mathbb{R}$ es suave si $\forall$ carta $\varphi : \mathcal{U} \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ la composición $F := f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto F(x_1, \dots, x_n)$ es suave.

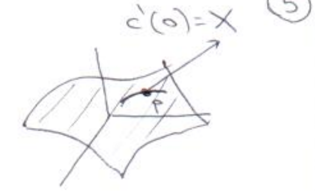
⚠ Una función suave $f : M^n \longrightarrow N^p$ es localmente una función $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^p$ y luego las nociones de inmersión, submersión o encajamiento están bien definidas: cambiar la carta $\mathcal{U} \subseteq M$ o $V \subseteq N$ se traduce (regla de la cadena) en cambio de base de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^p$ y luego la inyectividad/sobreyectividad de $d_p F$ no depende de la repr. F.

Def: Decimos que dos variedades M y N son difeomorfas, y escribimos $M \cong N$, si existe $f : M \longrightarrow N$ suave biyectiva con $f^{-1} : N \longrightarrow M$ suave (ie, f difeomorfismo). En part, $\dim(N) = \dim(M)$ en tal caso.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$ es difeomorfa a $\mathbb{S}^n$ como variedad "abstracta" descrita usando proyección estereográfica desde $N = (1,0,\dots,0)$ y $S = (-1,0,\dots,0)$.

§6. Vectores tangentes

$\mathbb{R}$-ev.



<u>Recuerdo</u>: Sea $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ subvar y sea $p \in M$. Entonces, $X \in \mathbb{R}^N$ es un vector tangente a M en p si $\exists\, c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = X$.

En part, dos caminos c_1 y c_2 definen el mismo vector tangente si $c_1'(0) = c_2'(0)$.

<u>Def</u>: Sea M una variedad y sea $p \in M$.

1. Dos caminos $c_1, c_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ de clase $\mathcal{C}^1$ con $c_1(0) = c_2(0) = p$ son <u>equivalentes</u> si $\forall$ carta $\varphi : \mathcal{U} \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ con $p \in \mathcal{U}$ se tiene $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$.
2. Un <u>vector tangente</u> en $p \in M$ es una clase de equivalencia de dichos caminos.
3. $T_pM := \{\text{vectores tangentes en } p \in M\}$ es el <u>espacio tangente</u> de M en p; $T_pM \underset{\mathbb{R}\text{-ev}}{\simeq} \mathbb{R}^n$

<u>Construcción</u> (Diferencial de una función): Sea $f : M^n \longrightarrow N^p$

Si $c_1 \sim c_2$
$\Rightarrow f \circ c_1 \sim f \circ c_2$

Luego, obtenemos $d_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$, $X = [c] \longmapsto Y = (d_pf)(X) := [f \circ c]$ aplicación lineal, llamada el <u>diferencial</u> de f en $p \in M$.

<u>Regla de la cadena</u>: Si $f : M \to N$ y $g : N \longrightarrow S$ son funciones suaves, entonces $d_p(g \circ f) = (d_{f(p)}g) \circ (d_pf)$.

En part, si $f : M \xrightarrow{\sim} N$ difeomorfismo y $f^{-1} : N \xrightarrow{\sim} M$, entonces $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_M$ y luego $(d_pf)^{-1} = d_{f(p)}(f^{-1})$

<u>Construcción</u> (Fibrado tangente):

Supongamos primero que $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ subvar y definamos

$$TM := \{(p, X) \in M \times \mathbb{R}^N \text{ tal que } X \in T_pM\} \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

Entonces, $TM \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^{2N}$ es una subvar de $\dim(TM) = 2n$:

Si $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una carta en $p \in M$, entonces

$$\Phi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad (p, X) \longmapsto (\varphi(p), (d_p\varphi)(X))$$

es una carta local para TM (Ejercicio). Si consideramos la proyección canónica $\pi : TM \longrightarrow M$, $(p, X) \longmapsto p$ entonces π es una función suave con $\pi^{-1}(p) \overset{\text{def}}{=} T_pM$.

i.e, TM es una variedad "que parametriza <u>todos</u> los vectores tangentes de M".

Sup. que M es una variedad "abstracta" de $\dim(M) = n$. Consideremos el conjunto $TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM \overset{\text{def}}{=} \{(p, X),\ p \in M \text{ y } X \in T_pM\}$ con $\pi : TM \to M$ dada por $\pi(p, X) = p$. Como antes, si $\varphi : \mathcal{U} \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ carta local, entonces consideramos la biyección $\Phi_{\mathcal{U}} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq TM \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $(p, X) \longmapsto (\varphi(p), (d_p\varphi)(X))$.

Como en el ejemplo de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, usamos las $\Phi_{\mathcal{U}}$ para definir una topología en TM

Aquí, si $\varphi_i : \mathcal{U}_i \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ y $\varphi_j : \mathcal{U}_j \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ son dos cartas locales con $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ entonces hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subseteq TM \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{U}_i}"'] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{U}_j}"] & \\ \Phi_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n} \arrow[rr, "\Phi_{\mathcal{U}_j} \circ \Phi_{\mathcal{U}_i}^{-1}"] & & \Phi_{\mathcal{U}_j}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n} \end{tikzcd}$$

$$(p, X) \longmapsto \left(\varphi_{\mathcal{U}_j} \circ \varphi_{\mathcal{U}_i}^{-1}(p),\ d_p(\varphi_{\mathcal{U}_j} \circ \varphi_{\mathcal{U}_i}^{-1})(X)\right)$$

donde $u_{ij}(p) := d_p(\varphi_{\mathcal{U}_j} \circ \varphi_{\mathcal{U}_i}^{-1}) : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ en $GL_n(\mathbb{R})$. Así, TM es una variedad.

⚠ Notación: Si $\varphi : \mathcal{U} \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ carta local, escribimos $\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p))$ y decimos que las $x_i : \mathcal{U} \subseteq M \to \mathbb{R}$ son coordenadas locales. Para insistir en el hecho que son "duales" ("co-ordenadas") usualmente escribimos $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$. Si $X \in T_pM \cong \mathbb{R}^n$ entonces $X = (X^1, \ldots, X^n) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ donde $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ será la base canónica de T_pM (Más adelante: X es una "derivación"). También es muy común usar la "notación de Einstein" (inventada por Ricci!), donde se omite el símbolo de sumatoria $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} := X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

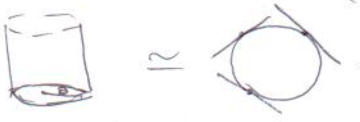
Construcción (Aplicación tangente):
Usando el lenguaje de fibrados tangentes, podemos definir una versión global del diferencial de una función suave. Sea $f : M^n \to N^p$ función suave, entonces $\forall p \in M$ tenemos $d_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ lineal. Luego, podemos considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "df"] \arrow[d, "\pi_M"'] & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

donde $df : TM \to TN$ $(p, X) \mapsto (f(p), (d_pf)(X))$ aplicación tangente.
Explícitamente, si $(x^i) \overset{\text{def}}{=} (x^1, \ldots, x^n)$ son coord locales en M y (y^j) coord. locales en N entonces $f = (f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, f^p(x^1, \ldots, x^n))$ y $X = (X_1, \ldots, X_n) \overset{\text{def}}{=} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$ entonces $(df)(p, X) = (df)(x^1, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^n) = \left(f^1, \ldots, f^p, X^i \frac{\partial f^1}{\partial x^i}, \ldots, X^i \frac{\partial f^p}{\partial x^i}\right)$
donde los $X^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f^j}{\partial x_i}$ se obtienen al multiplicar por la matriz jacobiana (!)   Not. de Einstein

Obs: La regla de la cadena se traduce en que $d(g \circ f) = dg \circ df$.

Ejemplo (Fibrado tangente de $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$) Si $p = (\cos\theta, \sin\theta) \in S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces la recta tangente está generada por $(-\sin\theta, \cos\theta)$ y luego $X = (-\lambda\cos\theta, \lambda\cos\theta)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ es un vector tangente arbitrario. Así, obtenemos un difeomorfismo
$S^1 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} TS^1$, $(p = (\cos\theta, \sin\theta), \lambda) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, -\lambda\sin(\theta), \lambda\cos(\theta))$



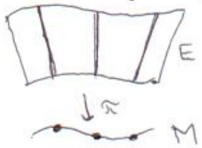
entre TS^1 y el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

La construcción del fibrado tangente y la forma de sus cambios de carta, motivan la siguiente

Def - Un fibrado vectorial de rango $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ sobre una var. M es una variedad E junto con una función suave sobreyectiva $\pi : E \to M$ tal que:

① $\forall p \in M$, $\pi^{-1}(p) := E_p$ es un $\mathbb{R}$-ev $\cong \mathbb{R}^r$.

② $\forall p \in M$, $\exists\, \mathcal{U} \subseteq M$ vecindad abierta de p y una trivialización de E sobre $\mathcal{U}$, ie, un difeomorfismo $\Theta_{\mathcal{U}} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) =: E|_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times \mathbb{R}^r$ tal que el diagrama

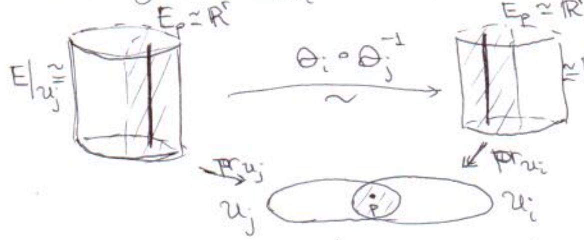


$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathcal{U}) = E|_{\mathcal{U}} \arrow[rr, "\Theta_{\mathcal{U}}", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{U} \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "pr_{\mathcal{U}}"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, ie, $\pi(\Theta_{\mathcal{U}}^{-1}(p, v)) = p$.

y la función $\mathbb{R}^r \xrightarrow{\sim} E_p$, $v \longmapsto \Theta_{\mathcal{U}}^{-1}(p, v)$ es un isomorfismo lineal $\forall p \in \mathcal{U}$.

Obs importante: Si $M = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ cubr. abierto y cada $\mathcal{U}_i$ trivializa E, ie, existe una trivialización $E|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow[\sim]{\Theta_i} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^r$ entonces para $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$. Tenemos:



$$(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^r$$
$$(p, v) \longmapsto (p, g_{ij}(p) v)$$

donde $g_{ij}(p) \in GL_r(\mathbb{R})$ son matrices de transición

ie, $g_{ij} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \to GL_r(\mathbb{R})$ son funciones suaves (con valores matriciales) que cumplen:

① $g_{ii}(p) = I_r \quad \forall p \in \mathcal{U}$ (pues $\Theta_i \circ \Theta_i^{-1} = Id$)

② $g_{ij}^{-1} = g_{ji}$

③ $g_{ij}\, g_{jk}\, g_{ki} = Id$ "Condición de cociclo"

⚠ Recíprocamente, dado un conjunto de matrices de transición $\{g_{ij} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \to GL_r(\mathbb{R})\}_{i,j \in I}$ resp. a un cubr. abierto $M = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, podemos construir un fibrado vectorial
$$E := \Big(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^r \Big) / \sim \quad \text{donde } (j; p, v) \sim (i; p, g_{ij}(p) v) \text{ si } p \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j.$$

Ejemplos: ① $E := M \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\pi = pr_M} M$ es el fibrado trivial (con $g_{ij} \equiv Id$)

② $E = TM \xrightarrow{\pi} M$ fibrado tangente (eg. $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ fibrado trivial)

③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que la banda de Möbius $E := ([0,1] \times \mathbb{R}) / \sim$, con $(1, t) \sim (0, -t)$, es un fibrado vectorial de rango 1 sobre $M = S^1 \cong [0,1] / (0 \sim 1)$.

Construcción: Sean $E \to M$ y $F \to M$ fibrados vectoriales de $rg(E) = r$ y $rg(F) = s$, dados por matrices de transición (con un cubrimiento común) $g_{ij}(p) \in GL_r(\mathbb{R})$ y $h_{ij}(p) \in GL_s(\mathbb{R})$

Definimos los fibrados vectoriales siguientes:

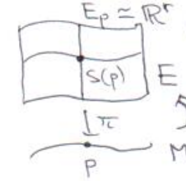
① $E \oplus F$, mediante $\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}$, con $rg(E \oplus F) = r + s$.

② $E \otimes F$, mediante $g_{ij} \otimes h_{ij}$, con $rg(E \otimes F) = rs$.

③ E^* mediante ${}^t g_{ij}^{-1}$, con $rg(E^*) = r$.

④ $Hom(E, F) := E^* \otimes F$, con $rg(Hom(E, F)) = rs$.

Aquí, por ejemplo, $(E^*)_p = E_p^* \overset{\text{def}}{=} Hom_{\mathbb{R}}(E_p, \mathbb{R})$ espacio dual de E_p.



Def: Una sección (suave) de un fibr. vectorial $\pi: E \longrightarrow M$ es una función suave $s: M \longrightarrow E$ tal que $\pi(s(p)) = p \quad \forall p \in M$. Escribimos
$\Gamma(M,E) = \Gamma(E) := \{ s: M \to E \text{ sección de } \pi: E \to M \}$ y
$\Gamma_c(M,E) = \Gamma_c(E) := \{ s: M \to E \text{ sección con soporte compacto de } \pi: E \to M \}$.

Obs importante: ① Si $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ entonces podemos definir $(fs_1 + s_2) \in \Gamma(E)$ mediante $(fs_1+s_2)(p) := f(p)s_1(p) + s_2(p) \in E_p \simeq \mathbb{R}^r$, ie, $\Gamma(E)$ es un $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo.
② Si $E|_{\mathcal{U}} \underset{\theta}{\cong} \mathcal{U} \times \mathbb{R}^r$ trivialización, $(\theta \circ s|_{\mathcal{U}})(p) = (p; s_1(p), \dots, s_r(p))$, ie, s está det. por $s_1, \dots, s_r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ funciones suave. Eg. Si $E = M \times \mathbb{R}$, entonces $\Gamma(E) \cong \mathcal{C}^\infty(M)$.

Def: Las secciones $\Gamma(M, TM) = \Gamma(TM) = \{ X : M \to TM \text{ sección de } TM \to M \}$ son llamadas campos vectoriales. En part, $X(p) \in T_pM \quad \forall p \in M$.

Construcción (Fibrado Cotangente): Sea M variedad, definimos $T^*M := (TM)^*$ su fibrado cotangente donde $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ son llamadas 1-formas diferenciales.

Ejemplo principal: Sea $f: M \to \mathbb{R}$ función suave, entonces $d_pf : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal $\forall p \in M$, ie, $d_pf \in T_p^*M$. Así, podemos pensar $df \in \Omega^1(M)$ como una sección global de T^*M. Concretamente: si $(x^1, \dots, x^n)$ son coord. locales de M, y $(dx^1, \dots, dx^n)$ base local de T^*M entonces $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

§8. Derivada y Corchete de Lie

Dado que un campo de vectores representa una dirección (tangente) en cada punto, podemos considerar la "derivada direccional" de una función respecto a dicho campo. Formalmente: Sea $f: M \to \mathbb{R}$ función suave, con $d_pf: T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, y $X_p = (X^1, \dots, X^n) \in T_pM$ entonces $(d_pf)(X) \overset{\text{loc}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x^i} X^i = \frac{\partial f(p)}{\partial x^i} X^i$ y luego, por la regla de Leibniz:
$d_p(fg)(X) = (d_pf)(X)\, g(p) + f(p)\, (d_pf)(X)$.

Más generalmente:

Def: Sea $f: M \to \mathbb{R}$ función suave y sea $X \in \Gamma(TM)$ (y luego $X(p) \in T_pX$). Definimos la derivada de Lie $\mathcal{L}_X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ mediante $\mathcal{L}_X(f) := df(X)$.
En part, $\mathcal{L}_X(fg) = (\mathcal{L}_X f)g + f(\mathcal{L}_X g)$

Ejemplo: Por la discusión anterior, si $X \equiv e_i$ campo vectorial constante entonces $\mathcal{L}_{e_i} f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Por ello, en lo que sigue escribiremos $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Def: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra conmutativa (eg. $A = \mathcal{C}^\infty(M)$). Una derivación de A es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $D: A \to A$ tal que $D(ab) = (Da)b + a(Db) \ \forall a,b \in A$, y denotamos $\operatorname{Der}(A) := \{ D: A \to A \text{ derivación} \}$.

Teorema: La aplicación lineal $\Gamma(TM) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$, $X \mapsto \mathcal{L}_X$ es un isomorfismo.

Dem: Sea $D: \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ y veamos que $\exists!\ X$ campo vectorial con $D = \mathcal{L}_X$.

$\boxed{\text{Paso 1}}$ Si $\mathcal{U} \subseteq M$ abierto, $f|_{\mathcal{U}} = 0 \Rightarrow (Df)|_{\mathcal{U}} = 0$; (así, $f|_{\mathcal{U}} = g|_{\mathcal{U}} \Rightarrow Df|_{\mathcal{U}} = Dg|_{\mathcal{U}}$)

Sea $\chi: M \to \mathbb{R}$ suave con soporte compacto $\subseteq \mathcal{U} \Rightarrow D(\chi f) = \chi Df + (D\chi) f$.
Como χ arbitraria, $f|_{\mathcal{U}} = 0 \Rightarrow \chi \cdot Df = 0$ en $\mathcal{U}$ $\forall$ dicha $\chi \Rightarrow Df|_{\mathcal{U}} = 0$.

Paso 2 $D(1) = 0$ $(\Rightarrow D(\lambda) = 0\ \forall \lambda \in \mathbb{R})$: $D(1^2) = 1D(1) + 1D(1) = 2D(1)$ ✓

Paso 3 Unicidad de X y existencia local de X con $D = \mathcal{L}_X$:
Sean $(x^1, \dots, x^n)$ coord locales de M en una carta $\mathcal{U} \subseteq M$. Si $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, entonces
$f(x^1, \dots, x^n) \overset{\text{Taylor}}{=} f(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x^1, \dots, x^n)$ con $g_i \in C^\infty(\mathcal{U})$.

$$\Rightarrow (Df)(0,\dots,0) = \sum_{i=1}^n (Dx^i)(0,\dots,0)\, g_i(0,\dots,0) = \sum_{i=1}^n (Dx^i)(0,\dots,0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(0,\dots,0)$$

Así, deducimos que $X(p) = (Dx^i)(p) \frac{\partial}{\partial x^i}$ $\forall p \in \mathcal{U}$ ✓

Paso 4 Existencia global: Pegamos de manera única los $X_{\mathcal{U}_i}$ con $\mathcal{U}_i \subseteq M$ carta local en $X \in \Gamma(TM)$ ■

Ejercicio Si $D_1, D_2 : A \to A$ son derivaciones de A $\mathbb{R}$-álgebra, $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ también.

Def: Sean $X, Y \in \Gamma(TM)$. El <u>corchete de Lie</u> $[X,Y] \in \Gamma(TM)$ es el <u>único</u> campo de vectores correspondiente a la derivación $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$.

<u>Concretamente</u>: si $X \overset{\text{loc}}{=} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ entonces, para $f \overset{\text{loc}}{=} f(x^1, \dots, x^n)$:

$$(\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y)(f) - (\mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X)(f) \overset{\text{loc}}{=} X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

ie, $[X,Y] \overset{\text{loc}}{=} \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}$ (con la notación de Einstein)

Usando esta fórmula se prueba directamente (Ejercicio): (0) $[X,Y] = -[Y,X]$
(1) $[X, fY] = f[X,Y] + \mathcal{L}_X(f) \cdot Y$, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $\forall f \in C^\infty(M)$
(2) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (<u>Identidad de Jacobi</u>)
(3) Si $N \subseteq M$ subvariedad y $X, Y \in \Gamma(TM)$ son tales que $X(p), Y(p) \in T_pN$ $\forall p \in N$ entonces $[X,Y](p) \in T_pN$ $\forall p \in N$ y $[X,Y]|_N = [X|_N, Y|_N]$.

§9. Flujo de campos vectoriales y EDO en variedades

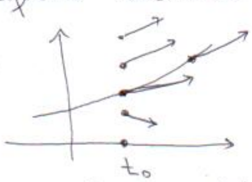
Sea $c: I =]a,b[\subseteq \mathbb{R} \to M^n$ una curva suave. Para todo $t \in I$, si escribimos $c(t) \overset{\text{loc}}{=} (c^1(t), \dots, c^n(t))$ entonces $\dot{c}(t) := (d_t c)(1) \overset{\text{def}}{=} (d_t c)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = (\dot{c}^1(t), \dots, \dot{c}^n(t)) \in T_{c(t)}M$ es un vector tangente. Luego, si $X \in \Gamma(TM)$ podemos considerar la EDO dada por:

$$\dot{c} = X(c) \iff \text{si } X \overset{\text{loc}}{=} (X^1, \dots, X^n),\ \dot{c}^i(t) = \frac{dc^i}{dt} = X^i(c^1(t), \dots, c^n(t))\ \forall i = 1, \dots, n$$

<u>Eg</u>: Si $M = \mathbb{R}^2$, $X = (P(x,y), Q(x,y)) \overset{\text{def}}{=} P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ y $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$ entonces buscamos resolver $\dot{x}(t) = P(x(t), y(t))$, $\dot{y} = Q(x(t), y(t))$ para $t \in I$.

<u>Recuerdo</u>: Dada $c(t_0) \in M$ condición inicial, la ecuación $\dot{c} = X(c)$ tiene solución única en un pequeño intervalo conteniendo t_0.

Idea ($M = \mathbb{R}$)



$\frac{dx}{dt} = f(t)$.

<u>Lo Típico</u>: Dada $c(0) = p \in M$ cond. inicial, $\exists!$ solución $c_p(t)$ en un intervalo <u>maximal</u> $I \ni 0$.

Def: $X \in \Gamma(TM)$ es un campo vect. <u>completo</u> si $c_p(t)$ está def. $\forall t \in \mathbb{R}$ para todo $p \in M$.