Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 5 MAT430:

14 de abril 2025

Profesor: Pedro Montero Ayudante: Mateo Hidalgo

.

1 Recuerdo

Definición 1.1. *Si V es un campo vectorial en M, una **curva integral** de V es una curva diferenciable $\gamma : J \to M$ cuya velocidad en cada punto de M es igual al valor de V en ese punto. Es decir:*

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)} \quad \text{para todo } t \in J$$

*Si $0 \in J$, el punto $\gamma(0)$ es llamado **punto inicial** de γ.*

Teorema 1. *Los resultados usuales de existencia y unicidad (vistos en MAT023 Y el curso de EDO) se transfieren al caso de curvas integrales.*

Definición 1.2. *Sea M una variedad diferenciable. Una distribución en M de rango k es un subfibrado de TM de rango k.*
*Suponga que $D \subseteq TM$ es una distribución. Una subvariedad no-vacía (inmersa) $N \subseteq M$ es llamada **variedad integral** de D si $T_pN = D_p$ en cada punto $p \in N$.*
*Una distribución D en M se dice **integrable** si cada punto de M está contenido en una subvariedad integral de D. Decimos que D es **involutiva** si cada par de secciones locales de D (i.e., campos vectoriales X, Y definidos en un abierto de M tales que $X_p, Y_p \in D_p$ para cada p), su corchete de Lie es también una sección local de D.*

Teorema 2 (Frobenius)**.** *Una distribución es involutiva si y solo si es integrable.*

2 Ejercicios

1. Encuentre las curvas integrales de los siguientes campos vectoriales y determine si son completos o no

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$$
$$X = \frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{e}^x \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right)$$

Solución:

(a) Las curvas integrales son las soluciones de las ecuaciones

$$x'(t) = x^2(t)$$

es decir $x'(t)/\, x^2(t) = 1$, cuya solución es $x(t) = -1/(t + A)$. La curva integral por x_0 verifica $x(0) = x_0$, por tanto $x_0 = -1/A$, así que es la curva

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

la cual no está definida para $t = 1/x_0$, por lo que X no es completo.

(b) Las curvas integrales son las soluciones del sistema

$$x'(t) = 0, \quad y'(t) = 1, \quad z'(t) = \mathrm{e}^{x(t)}$$

por tanto

$$x(t) = A, \quad y(t) = t + B, \quad z(t) = \mathrm{e}^{A}t + C.$$

La curva integral de X por (x_0, y_0, z_0) es

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = t + y_0, \quad z(t) = \mathrm{e}^{x_0}t + z_0$$

que está definida por $t \in \mathbb{R}$, así que X es completo.

2. El campo vectorial $X = x\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$, definido en $x > 0, y > 0$, $z > 0$ in $\mathbb{R}^3$, determina una distribución 2-dimensional dada por los campos vectoriales ortogonales a X ¿Es esta distribución involutiva?

Solución: Los campos vectoriales $U = -y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ y $V = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$ son ortogonales a X y linealmente independientes en cada punto. En efecto

$$\begin{vmatrix} -y & 1 & 0 \\ -z & 0 & x \\ x & xy & z \end{vmatrix} = x^2y^2 + x^2z^2 > 0$$

Ellos generan la distribución y además $[U, V] = -y\frac{\partial}{\partial z}$. Pero

$$\begin{vmatrix} -y & 1 & 0 \\ -z & 0 & x \\ 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = -yz$$

no es idénticamente cero, tenemos que $[U, V]_p \notin \langle U_p, V_p \rangle$. Por tanto la distribución no es involutiva.

3. Considere en $\mathbb{R}^3$ los campos vectoriales

$$X = z\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = z\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}.$$

Pruebe que X, Y, Z define una distribución $\mathscr{D}$ en $\mathbb{R}^3$. ¿Qué dimensión tiene? ¿Es involutiva?

Solución:

Los campos X, Y, Z no son linealmente independientes porque $Z = X - Y$. Así $\mathscr{D}$ es una distribucón 2-dimensional, generada por X y Y, los cuales son linealmente independientes (uno nunca es un múltiplo escalar del otro). $\mathscr{D}$ no es involutiva, pues $[X, Y] = -\frac{\partial}{\partial x}$ y $-\frac{\partial}{\partial x} \notin \mathscr{D}$, porque si lo fuese

$$-\frac{\partial}{\partial x} = az\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial y} + b\frac{\partial}{\partial z}$$

tendríamos $az = -1, b = 0, b + a = 0$, contradicción.

4. Suponga que M es una variedad suave, $V \in \mathscr{X}(M)$, y $\gamma : J \to M$ es una curva integral maximal de V (donde por teoría de EDO podemos asumir J abierto).

   Decimos que γ es periódica si hay un número $T > 0$ tal que $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Muestre que exactamente uno de los siguientes es verdadero:

   - γ es constante.
   - γ es inyectivo.
   - γ es periódica y no-constante.

   Solución: Es claro que las condiciones son incompatibles.

   Ahora, si γ no es inyectiva entonces existen $t_0 < t_0' \in J$ tales que $\gamma(t_0) = \gamma(t_0')$. Notemos que las curvas $\chi : \hat{J} \to M, \chi(t) = \gamma(t+t_0)$ y $\chi' : \hat{J}' \to M, \chi(t) = \gamma(t+t_0')$ también son curvas integrales de V (donde $\hat{J} = \{t \in \mathbb{R} : t + t_0 \in J\}$ y $\hat{J}' = \{t \in \mathbb{R} : t + t_0' \in J\}$) con el mismo punto inicial. Por unicidad tenemos que $\chi' = \chi$ para todo $t \in \hat{J} \cap \hat{J}'$. Pero además, debemos tener $J = \mathbb{R}$ sino la curva integral χ permite extender la curva integral χ' a un intervalo de definición mayor o viceversa. Por tanto $\gamma(t+t_0) = \gamma(t+t_0'), \forall t \in \mathbb{R}$ así que γ es $T = t_0' - t_0$ periódica.

5. Considere en $\mathbb{R}^3$ la distribución $\mathscr{D}$ determinada por

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2xz}{1+x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2yz}{1+x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}.$$

   (a) Calcule $[X,Y]$ y verifique que $\mathscr{D}$ es involutiva.

   (b) Calcule los flujos de X e Y.

   (c) Verifique que las superficies de la forma $z/(1+x^2+y^2) = $ cte son variedades integrales para $\mathscr{D}$.

   Solución:

   (a) $[X,Y] = 0$, y por tanto $\mathscr{D}$ es involutiva.

   (b) Tenemos

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \end{cases}$$

   y

$$\frac{z'}{z} = \frac{2\,(x_0+t)}{1+(x_0+t)^2+y_0^2}$$

   si y solo si $\log z = \log A\left(1+(x_0+t)^2+y_0^2\right)$ si y solo si $z = A\,(1+(x_0+\ t)^2+y_0^2)$. Para $t = 0, z_0 = A\left(1+x_0^2+y_0^2\right)$, entonces

$$z = z_0\frac{1+(x_0+t)^2+y_0^2}{1+x_0^2+y_0^2}$$

   Por lo que el flujo (local) de X es

$$\varphi_t(x,y,z) = \left(x+t, y, z\frac{1+(x+t)^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

   Similarmente, el flujo (local) de Y es

$$\psi_s(x,y,z) = \left(x, y+s, z\frac{1+x^2+(y+s)^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

(c) Consideremos $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto z/(1 + x^2 + y^2)$. Tenemos

$$\nabla\Phi(x,y,z) = \left(\frac{-2xz}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{-2yz}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{1}{1+x^2+y^2} \right)$$

por lo que es una submersión así que sus fibras de la forma $M := \Phi^{-1}(c)$ son subvariedades embedidas $\mathbb{R}^3$ con tangente $TM_{(x,y,z)}$ dado en cada punto (x, y, z) por el kernel de $d\Phi(x, y, z)$, es decir por los vectores de la forma (a, b, c) tales que

$$-2xza - 2yzb + (1 + x^2 + y^2)c = 0$$

Pero los vectores $X_{(x,y,z)}$ e $Y_{(x,y,z)}$ están en este kernel y son linealmente independientes, así que los espacios tangentes de M son justamente los dados por la distribución $\mathscr{D}$.

3 Propuestos

1. ★★★ Sean x, y, z las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^3$. Consideramos la distribución $\mathrm{D} = \ker(dz - ydx) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$

   (a) Verifique que D no es integrable.

   (b) Calcule los flujos ϕ_t (resp. ψ_u) of $\frac{\partial}{\partial y}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$) y el conmutador $\psi_{-u}\phi_{-t}\psi_u\phi_t$

   (c) Deduzca que dos puntos cualesquiera en R^3 pueden ser conectados por un camino suave por pedazos que se mantiene tangente a D. Compare este fenómeno con el que sucede en una distribución integrable.

2. ★☆☆ Para cada uno de los siguientes campos vectoriales encuentre curvas integrales y estudie si acaso es completo o no:

   (a) $X = \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}\right)$;

   (b) $X = \mathrm{e}^{-x}\frac{\partial}{\partial x}$;

   (c) $[X, Y]$ donde $X = y\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}$

   (d) $X = x\frac{\partial}{\partial x}$;

   (e) $X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$.

   Los últimos cuatro campos vectoriales pertenecen a $\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^2\right)$.