Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 4 MAT430: Campos Vectoriales y Corchete de Lie

07 de abril 2025

Profesor: Pedro Montero Ayudante: Mateo Hidalgo

.

1 Recuerdo

Definición 1.1. *Un grupo de Lie G es un grupo usual, que además es variedad diferenciable y donde la ley interna $G \times G \to G$ es suave.*

2 Ejercicios

1. Pruebe el teorema del rango equivariante:

   Teorema 1. *Sea G grupo de Lie con una acción suave sobre N y una acción transitiva y suave sobre M, si $F : M \to N$ es mapa suave que cumple $F(g \cdot p) = g \cdot F(p)$ entonces F tiene rango constante.*

   Solución: Denotemos las acciones por θ y φ en M y N respectivamente. Sean p y q puntos arbitrarios en M. Elijamos $g \in G$ tales que $\theta_g(p) = q$. (Tal g existe porque estamos asumiendo que G actúa transitivamente en M.) Ya que $\varphi_g \circ F = F \circ \theta_g$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "dF_p"] \arrow[d, "d(\theta_g)_p"'] & T_{F(p)}N \arrow[d, "d(\varphi_g)_{F(p)}"] \\ T_qM \arrow[r, "dF_q"] & T_{F(q)}N \end{tikzcd}$$

   Ya que las flechas verticales del diagrama son isomorfismos, los mapas horizontales tienen el mismo rango. En otras palabras, el rango de F es el mismo para todo $p, q \in M$.

2. Use el ítem anterior para probar que grupo ortogonal $O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tales que } A^TA = I_n\}$ tiene dimensión $n(n-1)/2$ y es compacto.

   Solución:

   Definamos un mapa suave $\Phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ por $\Phi(A) = A^TA$. Entonces $\mathrm{O}(n)$ es igual al conjunto de nivel $\Phi^{-1}(I_n)$. Para mostrar que Φ tiene rango constante y por tanto que $\mathrm{O}(n)$ es un subgrupo de Lie embedido, mostramos que Φ es equivariante bajo acciones de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ apropiadas. Tenemos que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ actúa en sí mismo por multiplicación, y definimos una acción de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ en $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ por

$$X \cdot B = B^TXB \quad \text{para } X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}), B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

   Es fácil checkear que esta es una acción suave y Φ es equivariante pues

$$\Phi(AB) = (AB)^T(AB) = B^TA^TAB = B^T\Phi(A)B = \Phi(A) \cdot B$$

Además $\mathrm{O}(n)$ es compacto porque es cerrado y acotado en $\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$:cerrado por ser un conjunto de nivel de Φ, y acotado pues $A \in \mathrm{O}(n)$ tiene columnas de norma 1 y por tanto satisface $|A| = \sqrt{n}$.

Para determinar la dimensión de $\mathrm{O}(n)$, debemos calcular el rango de Φ, por ejemplo en $I_n \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Para cualquier $B \in T_{I_n}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$, sea $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ la curva $\gamma(t) = I_n + tB$ (esta curva está bien definida para ε suficientemente pequeño pues $I_n \in GL(n,\mathbb{R})$ abierto de $M_n(R)$ espacio euclideano) tenemos que γ es suave, $\gamma(0) = I_n$, $\gamma'(t) = B$ y así:

$$d\Phi_{I_n}(B) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\Phi \circ \gamma)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (I_n + tB)^T (I_n + tB) = B^T + B$$

De esta fórmula, es evidente que la imagen de $d\Phi_{I_n}$ está contenida en el espacio vectorial de matrices simétricas. Conversamente, si $B \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ es una matriz $n \times n$ simétrica, entonces $d\Phi_{I_n}\left(\frac{1}{2}B\right) = B$. Por tanto el rango de $d\Phi$ es la dimensión de el espacio vectorial de matrices simétricas. Sigue que $\mathrm{O}(n)$ tiene dimensión $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$.

3. Considere los siguientes dos campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$:

$$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad W = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

Muestre que $[V, W] = 0$. Además considere $p = (1, 0)$ y pruebe que existe una carta suave (U, Ψ) en torno a p, donde Ψ es tal que $\Psi^{-1}(s,t) = (e^t \cos(s), e^t \sin(s))$ y $(d\Psi)^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}) = V$ y $(d\Psi)^{-1}(\frac{\partial}{\partial y}) = W$ (decimos que Ψ deja a V, W en forma canónica, lo cual no es siempre posible).

Solución:

Tenemos

$$[\mathscr{L}_V, \mathscr{L}_W] = \mathscr{L}_V \circ \mathscr{L}_W - \mathscr{L}_W \circ \mathscr{L}_V$$

o, usando la identificación de campos vectoriales con derivaciones,

$$[V,W]f = VWf - WVf, \quad [V,W] = VW - WV, \quad [V,W]_p f = V_p(Wf) - W_p(Vf), \quad \forall f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$$

(recordemos que $Vf : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $W_p : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$) al tomar coordenadas, tenemos, como fue visto en clases:

$$[V,W] = \left(V^i \frac{\partial W^i}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

así que el coeficiente de la coordenada $\frac{\partial}{\partial x}$ de $[V,W]$ es:

$$\left(-y\frac{\partial x}{\partial x} + x\frac{\partial x}{\partial y}\right) - \left(x\frac{\partial(-y)}{\partial x} + y\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) = 0$$

y el coeficiente de la coordenada $\frac{\partial}{\partial y}$ de $[V,W]$ es

$$\left(-y\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial y}{\partial y}\right) - \left(x\frac{\partial x}{\partial x} + y\frac{\partial x}{\partial y}\right) = 0$$

así que $[V,W] = 0$.

Definamos $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$\Phi(s,t) = \left(e^t \cos s, e^t \sin s\right)$$

Notamos que $\Phi(0,0) = (1,0)$ y que (abusando notación, como es usual, para identificar una transformación lineal y la matriz que la representa):

$$d\Phi(s,t) = \begin{pmatrix} -e^t \sin s & e^t \cos s \\ e^t \cos s & e^t \sin s \end{pmatrix}$$

que tiene determinante constante igual a -1, por lo que Φ es un difeomorfismo local, así que tiene sentido hablar de $\Phi^{-1} = \Psi$ en una vecindad de p, donde es un difeomorfismo (de hecho, Ψ viene dada explícitamente por $(s,t) = \left(\tan^{-1}(y/x), \log\sqrt{x^2+y^2}\right))$

Por último, recordar que $(d\Psi)^{-1} = (d\Psi^{-1}) = d\Phi$ y notamos que

$$d\Phi(s,t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} -e^t \sin s & e^t \cos s \\ e^t \cos s & e^t \sin s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \sin s \\ e^t \cos s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} = V$$

y

$$d\Phi(s,t)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} -e^t \sin s & e^t \cos s \\ e^t \cos s & e^t \sin s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos s \\ e^t \sin s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = W$$

.

4. Sea $x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n$ las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^{2n}$. La esfera unitaria $\mathbb{S}^{2n-1}$ en $\mathbb{R}^{2n}$. Muestre que

$$X = \sum_{i=1}^{n} -y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

es un campo vectorial S^{2n-1} que no se anula.

Solución:

Tenemos que $\mathbb{S}^m = \Phi^{-1}(0)$ donde $\Phi(p) = |p|^2 - 1$.

Así que $d_p\Phi(x) = 2p \cdot x$ y $T_p\mathbb{S}^n = \ker(d_p\Phi) = p^{\perp}$. Por tanto, queremos comprobar que $X_p \cdot p = 0$ para todo $p \in \mathbb{S}^{2n-1}$. Pero esto es claro.

Además, si $X_p = 0$ entonces $p = 0$ por lo que $p \notin \mathbb{S}^{2n-1}$.

5. Consideremos $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$ mapa cociente al toro. Pruebe que los campos vectoriales X, Y sobre el toro definidos por $X_{\pi(p)} := d\pi_p(\frac{\partial}{\partial x}|_p)$ y $Y_{\pi(p)} := d\pi_p(\frac{\partial}{\partial y}|_p)$ están bien definidos y que $[X,Y]$ se anula en todo $\mathbb{T}$.

Solución: Queda propuesto darle una estructura diferenciable al toro tal que π sea una función suave.

Es claro que los campos están bien definidos, pero probémoslo formalmente.

Sean $p, p' \in \mathbb{R}^2$ tales que $\pi(p') = \pi(p)$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F(p') = p$ entonces $\pi \circ F = \pi$ y

$$d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p\right) f = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p\right)(f\circ\pi) = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{p'}\right)(f\circ\pi\circ F) = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{p'}\right)(f\circ\pi) = d\pi_{p'}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{p'}\right) f$$

así que $d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p\right) = d\pi_{p'}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{p'}\right)$, por lo que X está bien definido. El cálculo para Y es análogo.

Antes de calcular el corchete de Lie hagamos un par de cálculos preliminares:

$$X_{\pi(p)}(Yf) = d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p\right)(Yf) = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p (Yf\circ\pi)$$

$$(Yf\circ\pi)(p) = Y_{\pi(p)}f = d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p\right) f = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p (f\circ\pi), \quad \text{por lo que } Yf\circ\pi = \frac{\partial}{\partial y}(f\circ\pi)$$

con cálculos análogos intercambiando los roles de X e Y.

Sea $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $q = \pi(p)$ entonces

$$\begin{aligned}
[X, Y]_{\pi(p)} f &= X_{\pi(p)}(Yf) - Y_{\pi(p)}(Xf) \\
&= \left(\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p \right) (Yf \circ \pi) - \left(\left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \right) (Xf \circ \pi) \\
&= \left(\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} (f \circ \pi) \right) - \left(\left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} (f \circ \pi) \right) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]_p (f \circ \pi) \\
&= d\pi_p \left(\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]_p \right) f \\
&= 0
\end{aligned}$$

así que

$$[X, Y]_q = 0, \forall q \in \mathbb{T}$$

es decir, $[X, Y] \equiv 0$

3 Propuestos

1. ★★☆ Dé una estructura diferenciable al toro tal que $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$ sea una función suave.
2. ★☆☆ Para los siguientes campos vectoriales X, Y definidos en $\mathbb{R}^3$, calcule el corchete de Lie $[X, Y]$.
   (a) $X = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}; \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}$.
   (b) $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}; \quad Y = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$.
   (c) $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}; \quad Y = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$.