UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Ayudantía 3 MAT430: Tangentes

31 de marzo 2025

Profesor: Pedro Montero Ayudante: Mateo Hidalgo

1 Recuerdo

Definición 1.1. *Sea M una variedad diferenciable de dimensón n. Definimos TM como*

$$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM = \{(p,X), p \in M, X \in T_pM\}$$

Aquí cada T_pM es un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensión n, dada por clases de equivalencias de curvas. Las aplicaciones tangentes de $f : M \to N$ son funciones lineales $df_p : T_pM \to T_pN$

$$df_p(X) = [f \circ c]$$

para todo $X = [c]$ donde $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ diferenciable en 0 y $c(0) = p$.

Teorema 1. *Tenemos la identificación*

$$\Gamma(TM) \cong \mathrm{Der}(C^\infty(M))$$
$$X \mapsto \mathscr{L}_X$$

Así, para todo $X_p = [c] \in T_pM$ tiene sentido $X_pf := (\mathscr{L}_X f)(p) = df(X)(p) = df_p(X_p) = [f\circ c] \in T_{f(p)}\mathbb{R}$. Además, $dF_p(X_p)f = [F \circ c]f = [f \circ F \circ c] = X_p(f \circ F)$.

Teorema 2. *Si M es variedad diferenciable y $U \subset M$ es un abierto, entonces, con extensiones de la unidad podemos probar que la inclusión $U \hookrightarrow M$ induce el isomorfismo canónico $di_p : T_pU \to T_pM$.*

Teorema 3. *Es claro que si (ϕ, U) es una carta suave entonces $d\phi_p : T_pU \to T_{\phi(p)}M$ es un isomorfismo de inversa $d(\phi^{-1})_p$. Más generalmente tenemos la regla de la cadena $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$.*

Si consideramos una carta local suave (U, ϕ) torno a p sabemos que los vectores $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{\phi(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\phi(p)}\right)$ forman una base de $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$, así que las preimagenes forman una base para $T_pU \cong T_pM$, base que denotaremos por $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right)$ esta es la base más usual para T_pM.

De esta forma tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = (d\varphi_p)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}\right) = d\left(\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}\right).$$

y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p f = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{p})$$

donde $\hat{f} = f \circ \phi^{-1}$.

Consideremos primero $F : U \to V$, donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ son abiertos. Para todo $p \in U$, determinemos la matriz $dF_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ en términos de las bases coordenadas estándares. Usando $\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ para denotar coordenadas en el dominio y $\left(y^1, \ldots, y^m\right)$ para denotarlas en el codominio, usamos la regla de la cadena para calcular la acción de dF_p en un vector de la base como sigue:

$$
\begin{aligned}
dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) f &= \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f \circ F) = \frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p))\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \\
&= \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}\right) f.
\end{aligned}
$$

Luego tenemos para $F : M \to N$ suave, donde (U, ϕ) es carta suave para M en p y (V, ψ) carta suave para N en $F(p)$, que $\hat{F} : \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$ suave entre abiertos euclideanos. Ahora si $\phi(p) = \hat{p}$ entonces $\hat{F}(\hat{p}) = \psi^{-1}(F(p))$ y

$$
\begin{aligned}
dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = dF_p\left(d\left(\varphi^{-1}\right)_{\hat{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\hat{p}}\right)\right) = d\left(\psi^{-1}\right)_{\hat{F}(\hat{p})}\left(d\hat{F}_{\hat{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\hat{p}}\right)\right) &= d\left(\psi^{-1}\right)_{\hat{F}(\hat{p})}\left(\frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\hat{F}(\hat{p})}\right) \\
&= \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}.
\end{aligned}
$$

De esta forma, en las bases usuales, la matriz representante de dF_p es justo la Jacobiana de $\hat{F}$.

Teorema 4. *En particular cuando consideramos los mapas de transición tenemos una fórmula para hacer cambios de coordenadas*

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p &= d\left(\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right) \\
&= d\left(\psi^{-1}\right)_{\psi(p)} \circ d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right) \\
&= d\left(\psi^{-1}\right)_{\psi(p)}\left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p))\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right|_{\psi(p)}\right) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right|_p
\end{aligned}
$$

2 Ejercicios

1. Los mapas de transición entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas en abiertos adecuados del plano vienen dados por $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Exprese

$$
v = 3\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p - \left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_p
$$

en coordenadas cartesianas en el punto $p \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ cuya representación en polares es $(r, \theta) = (2, \pi/2)$.

Solución: Aplicando las fórmulas de cambios de coordenadas tenemos

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p, \\
\left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_p &= -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p = -2\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p,
\end{aligned}
$$

y por tanto

$$
v = 3\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p + 2\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p
$$

2. Sea M, N variedad diferenciables, sea $F : M \to N$ mapa suave. Muestre que $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es el mapa nulo para cada $p \in M$ si y solo si F es constante en cada componente conexa de M.

   Solución:

   Por definición de suavidad de F, tenemos que para todo $p \in M$ existe una carta suave (U, ϕ) para p y una carta suave (V, ψ) de $F(p)$ tal que $\hat{F} := \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$ es suave.

   Tenemos que

$$dF_p = 0 \iff dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = 0, \forall i \iff \left.\frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{F(p)} = 0, \forall i \iff \hat{F} \text{ es constante en } \phi(U \cap F^{-1}(V))$$
$$\iff F \text{ es constante en } U \cap F^{-1}(V)$$

   como $p \in U \cap F^{-1}(V)$ abierto y estos abiertos cubren M, tenemos que F es localmente constante, por tanto es constante en cada componente conexa.

3. Considere el mapa cociente $\pi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{RP}^n$. Describa explícitamente las cartas suaves vistas en clases, demostrando que $\mathbb{RP}^n$ es una variedad diferenciable compacta y calcule $d\pi_p$ con respecto a las coordenadas usuales, verifique que es una submersión.

   Solución: Para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos $\hat{U}_i \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ el conjunto donde $x^i \neq 0$ y definimos $U_i = \pi(\hat{U}_i)$ claramente abierto y saturado. Definimos los mapas $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$

$$\phi_i[x^1, \ldots, x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}\frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$$

   el cual está bien definido, claramente es continua y de hecho es un homeomorfismo pues su inversa está dada por

$$\phi_i^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = [u^1, \ldots, u^{i-1}, 1, u^i, \ldots, u^n]$$

   así $\mathbb{RP}^n$ es localmente euclideano de dimensión n.

   Queda verificar que $\mathbb{RP}^n$ es compacta, Hausdorff y segundo numerable. Que es compacto es porque podemos escribirlo como la imagen continua de la esfera $\mathbb{S}^n$, que es Hausdorff queda de ejercicio y que es segundo numerable sigue de que $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ es segundo numerable y π es un mapa cociente abierto. (En efecto, sea $U \in \mathbb{CP}^n$ abierto. Debemos probar que $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto. Pero

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \{rx : r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, x \in U\} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}} rU,$$

   el cual es una unión de abiertos.)

   Si $i > j$ tenemos que

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = \left(\frac{u^1}{u^j}, \ldots, \frac{u^{j-1}}{u^j}, \frac{u^{j+1}}{u^j}, \ldots, \frac{u^{i-1}}{u^j}, \frac{1}{u^j}, \frac{u^i}{u^j}, \ldots, \frac{u^n}{u^j}\right)$$

   es un difeomorfismo de $\phi_i(U_i \cap U_j)$ a $\phi_j(U_i \cap U_j)$, por tanto esto le da un estructura suave a $\mathbb{RP}^n$.

   Ahora, consideramos la estructura diferenciable usual para $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ (la inducida por la identidad), así que

$$\hat{\pi} = \phi_i \circ \pi \circ \mathrm{Id}^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \to \phi_i(U_i),$$
$$\hat{\pi}(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \phi_i \circ \pi(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \phi_i[x^1, \ldots, x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$$

   esto nos da una matriz Jacobiana explícita de $n + 1$ columnas

$$(1/x^i, 0, \dots, 0), (0, 1/x^i, 0, \dots, 0), \dots, \frac{-1}{x^i}\left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right), \dots, (0, \dots, 0, \frac{1}{x^i})$$

pero n de ellas son linealmente independientes, es decir la matriz tiene rango maximal, en particular es sobreyectiva y por tanto π es subermersión en cada abierto $\pi^{-1}(U_i)$, por tanto es submersión en todo $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$.

4. Sea $c \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ una función suave que es positivamente homogenea de grado c, es decir, $f(\lambda x) = \lambda^c f(x)$ para todo $\lambda > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Probar que $Vf = cf$, donde V es el campo vectorial de Euler definido por

$$V_p = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p + \cdots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p$$

Solución:

Derivamos con respecto a λ, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla f(\lambda x) \cdot x &= c\lambda^{c-1} f(x) \\ \nabla f(x) \cdot \frac{x}{\lambda} &= c\lambda^{c-1} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ \nabla f(x) \cdot x &= c\lambda^c f(x/\lambda) = cf(x) \end{aligned}$$

y además notamos que

$$(Vf)(p) = V_p(f) = p_i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

concluyendo.

3 Propuestos

1. ★☆☆ Verifique que el espacio proyectivo es Hausdorff. Para esto, note que dotando $\mathbb{R}^{n+1}$ de un producto interno podemos calcular ángulos y 'separar' rectas usando conos abiertos.

2. ★☆☆ Calcule la representación en coordenadas polares de los siguientes vectores tangentes:

$$\begin{aligned} X &= x\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_p + y\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_p \\ Y &= x\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_p - y\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_p \\ Z &= (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_p \end{aligned}$$

3. ★★★ Considere las curvas:

(a)

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, |t|) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(t^3 - 4t, t^2 - 4\right) \end{aligned}$$

(c)

$$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

(d)

$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$$

(e)

$$\begin{aligned} \sigma : (1, \infty) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{1}{t} \cos 2\pi t, \frac{1}{t} \sin 2\pi t \right) \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} \sigma : (1, \infty) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{1+t}{2t} \cos 2\pi t, \frac{1+t}{2t} \sin 2\pi t \right) \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(2\cos\left(f(t) - \frac{\pi}{2} \right), \sin 2\left(f(t) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

donde $f(t)$ denota una función creciente C^∞ en $-\infty < t < \infty$ tal que $f(0) = \pi, \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} f(t) = 2\pi$ (por instancia, $f(t) = \pi + 2\arctan t$).

(h)

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{cases} (1/t, \sin \pi t) & \text{if } 1 \leqslant t < \infty \\ (0, t+2) & \text{if } -\infty < t \leqslant -1 \end{cases} \end{aligned}$$

donde uno conecta de forma suave, para $-1 \leqslant t \leqslant 1$, las dos curvas $\sigma|_{(-\infty,-1]}$ y $\sigma|_{[1,\infty)}$ con una curva C^∞.

1. ¿Es σ una inmersión en (a)? (resp., en (b), (d), (g))?
2. ¿Es σ una inmersión inyectiva en (b) (resp., en (d), (g), (h), (i))?
3. ¿Es σ un embedimiento en (c)? (resp., en (e), (f), (h), (i))?