Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 2 MAT430: Estructuras Diferenciables

24 de marzo 2025

Profesor: Pedro Montero Ayudante: Mateo Hidalgo

1 Recuerdo

Definición 1.1. *Sea M una variedad topológica de dimensión n. Decimos que (U, ϕ) es una carta si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo a su imagen y esta es abierta en $\mathbb{R}^n$.*
Dadas dos cartas $(U, \phi), (V, \psi)$ decimos que son ***suavemente compatibles*** *si (o bien $U \cap V = \varnothing$ o bien) el* ***mapa de transición*** *$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es suave.*
Un ***atlas suave*** *es una colección de cartas compatibles cuyos dominios cubre M. Un atlas se dice maximal si lo es en el sentido de la inclusión.*
Un par $(M, \mathscr{A})$ con $\mathscr{A}$ atlas maximal sobre M se dice ***variedad diferenciable****.*

Teorema 1. *Todo atlas está contenido en un único atlas maximal (así, por ejemplo, $\mathscr{A} = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\}$ es un atlas para $M = \mathbb{R}^n$, solo por ser un singletón que contiene una única carta y por tanto determina una estructura maximal sobre $\mathbb{R}^n$).*
Además, dos atlas determinan el mismo atlas maximal ssi su unión es un atlas.

Teorema 2. *Todo espacio vectorial es una variedad diferencial (básicamente con la misma estructura de $\mathbb{R}^n$).*
Una variedad 0 dimensional (i.e. una unión numerable de puntos) tiene una única estructura suave sobre ella.
Todo abierto de una variedad diferencial es variedad diferencial con la estructura heredada por restricción de cartas.
Producto de variedades diferenciales es variedad diferencial con estructura dada por producto de cartas.

Teorema 3. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $f : U \to \mathbb{R}^k$ es suave, entonces su grafo es variedad diferencial, con estructura dada por una sala carta global $\phi : \Gamma(f) \to U$.*
Si $\Phi : U \to \mathbb{R}$ es suave, $c \in \mathrm{Im}(\Phi)$ y la derivada de Φ no se anula en $\Phi^{-1}(c)$, entonces por el teorema de la función implícita, la fibra es una variedad diferenciable.

2 Ejercicios

1. Considere los abiertos U, V del circulo unitario $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ dados por

$$U = \{(\cos(\alpha), \sin(\alpha) : \alpha \in (0, 2\pi))\}, \quad V = \{(\cos(\alpha), \sin(\alpha) : \alpha \in (-\pi, \pi))\}$$

Probar que $\mathscr{A} = \{(U, \phi), (V, \psi)\}$ es un atlas sobre $\mathbb{S}^1$ donde

$$\phi : U \to \mathbb{R} \quad \phi(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \alpha, \quad \alpha \in (0, 2\pi)$$
$$\psi : V \to \mathbb{R} \quad \psi(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \alpha \quad \alpha(-\pi, \pi).$$

Solución:

Tenemos claramente que $U \cup V = \mathbb{S}^1$. Los mapas ϕ y ψ son homeomorfismos sobre sus imágenes: $(0, 2\pi)$ y $(-\pi, \pi)$ respectivamente, ambos abiertos en $\mathbb{R}$. Por tanto (U, ϕ) y (V, ψ) son cartas locales sobre $\mathbb{S}^1$.

El mapa de transición $\psi \circ \phi^{-1}$, dado por

$$\begin{aligned} \phi(U \cup V) &\xrightarrow{\phi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\psi} \psi(U \cap V) \\ \alpha \mapsto (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) &\mapsto \begin{cases} \alpha, \text{ si } \alpha \in (0, \pi) \\ \alpha - 2\pi, \text{ si } \alpha \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \end{aligned}$$

es obviamente un difeomorfismo. Por tanto $\mathscr{A}$ es un atlas en $\mathbb{S}^1$.

2. Pruebe que la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(s) = s^3$ define una estructura diferenciable sobre $\mathbb{R}$ diferente a la usual en $\mathbb{R}$ (es decir, la inducida por $(\mathbb{R}, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$).

   Solución:

   Dado que $\phi^{-1}(s) = \sqrt[3]{s}$, ϕ es un homeomorfismo, así $\{(\mathbb{R}, \phi)\}$ es trivialmente un atlas **suave** para $\mathbb{R}$, solo por el hecho de que tiene apenas una carta.

   Para ver que la estrutura no es la usual, basta ver que los atlases no tienen el mismo atlas maximal, para esto basta ver que la unión $\{(\mathbb{R}, \phi), (\mathbb{R}, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})\}$ no es un atlas. En efecto, el mapa $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ \phi^{-1}$ no es diferenciable en 0.

   Sea $\mathbb{R}_\phi$ la variedad diferenciable con la nueva estructura diferenciable y $\mathbb{R}_{\mathrm{Id}}$ a la variedad con la estructura usual. Entonces el mapa
   $$\phi : \mathbb{R}_\phi \to \mathbb{R}_{\mathrm{Id}}$$
   es un difeomorfismo. En efecto, notemos que este mapa tiene la representación $\mathrm{Id} \circ \phi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ¡válida sobre toda la variedad!

3. Pruebe que si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, entonces el atlas $(\mathbb{R}^n, h)$ defeine la estructura diferenciable usual si y solo si h y h^{-1} son diferenciables.

   Solución: Si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo tal que el atlas $\{(\mathbb{R}^n, h)\}$ define la estructura diferenciable usual sobre $\mathbb{R}^n$ entonces $h = h \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}^{-1}$ y $h^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \circ h^{-1}$ son diferenciables. Y conversamente.

4. (Usa ejercicio anterior) Para cada real $r > 0$, considere el mapa $\phi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $\phi_r(t) = t$ si $t \leqslant 0$ y $\phi_r(t) = rt$ si $t \geqslant 0$. Pruebe que los atlases $\{(\mathbb{R}, \phi_r)\}_{r>0}$ definen una familia no-numerable de estructuras diferenciables en $\mathbb{R}$. Además, las variedad resultantes son difeomorfas.

   Solución:

   Para cada $r > 0$ tenemos que ϕ_r es un homeomorfismo, pero ϕ_r y ϕ_r^{-1} son diferenciables cuando $r = 1$ ($\phi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$). Por tanto $\{(\mathbb{R}, \phi_r)\}$, para $r \neq 1$ fijo, es un atlas definiendo una estructura diferenciable diferente de la usual (ejercicio anterior). Además, tenemos

   $$(\phi_r \circ \phi_s^{-1})(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \leqslant 0 \\ (r/s)t \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

   Así, si $r \neq s$, entonces $\phi_r \circ \phi_s^{-1}$ no es diferenciable. Consecuentemente, los atlases $\{(\mathbb{R}, \phi_r)\}$ y $\{(\mathbb{R}, \phi_s)\}$ definen diferentes estructuras diferenciables.

   Sin embargo, todas ellas son difeomorfas. En efecto, dadas dos variedades diferenciables como antes, digamos $\mathbb{R}_{\phi_{r_1}}$ y $\mathbb{R}_{\phi_{r_2}}$ un difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}_{\phi_{r_1}} \to \mathbb{R}_{\phi_{r_2}}$ está dado por la identidad para $t \leqslant 0$ y $t \mapsto (r_1/r_2)t$ para $t \geqslant 0$. De hecho, el mapa representante $\phi_{r_2} \circ \phi \circ \phi_{r_2}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la identidad.

5. Definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

   $$f(x) = \begin{cases} 1, \ x \geqslant 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$$

Muestre que para $x \in \mathbb{R}$, hay cartas suaves (U, ϕ) conteniendo a x y (V, ψ) conteniendo a $f(x)$ tal que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ son mapas suaves de $\phi(U \cap f^{-1})$ a $\psi(V)$ pero f no es suave en el sentido definido en clases.

Solución: Falla la continuidad.

Dado cualquier $A \subset \mathbb{R}$ abierto, es claro de la definición de estructura diferenciable en $\mathbb{R}$ que (A, Id_A) es una carta suave.

Para $x < 0$ considerar la $U = (-\infty, 0)$, $V = (-1/2, 1/2)$ y ϕ, ψ la identidad en U y V, así $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U \to V$ es evidentemente suave.

Para $x > 0$, $U = (0, +\infty)$, $V = (1/2, 3/2)$, ϕ y ψ la identidad en U y V, así $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U \to V$ evidentemente suave.

Finalmente, si $x = 0$, tomar $U = (-1/2, 1/2)$, $V = (1/2, 3/2)$, ψ y ϕ la identidad en U y V. Así $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : [0, 1/2) \to (1/2, 3/2)$ es evidentemente suave (constante).

6. Considere la función $f : \mathbf{R}^2 \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^4 \backslash \{0\}$ dada por

$$f(x, y) = \left(x^3, x^2 y, x y^2, y^3\right)$$

Probar que f es una inmersión propia y que es abierta sobre su imagen. (En futuras clases veremos que esto implica que $M = f\left(\mathbf{R}^2 \backslash \{0\}\right)$ es una subvariedad de $\mathbf{R}^4$ de dimensión 2).

Solución: Notemos que f está bien definida y es suave. Tenemos

$$df_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}_{(x,y)=(a,b)}$$

es claro que rango$(d_{(a,b)} f) \leqslant 1 \iff a = b = 0$, por tanto rango$(df_{(a,b)})$ tiene rango constante en 2 así que df es inyectivo en cada punto.

Sea $K \subset \mathbb{R}^4 \backslash \{0\}$ compacto (en particular cerrado) con $K \subset B_{\mathbb{R}^4}(0, R)$.

Si $(x, y) \in f^{-1}(K)$ entonces

$$x^6 + x^4 y^2 + x^2 y^4 + y^6 \leqslant R^2$$

en particular $x^6 \leqslant R^2$ y $y^6 \leqslant R^2$, así que $f^{-1}(K)$ es acotado.

Consideramos $\hat{f}$ una extensión continua de f a $\mathbb{R}^2$. Tenemos por continuidad que $f^{-1}(K) = \hat{f}^{-1}(K)$ es cerrado y por estar en dimensión finita, compacto.

Falta probar que $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to f(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$ es abierta. Claramente es inyectiva así que tiene inversa.

Y en efecto tenemos $f^{-1}(a, b, c, d) = (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{d})$ continua, así que en particular f es abierta sobre su imagen.

7. Considere el mapa

$$\Phi(x, y, s, t) = (x^2 + y, x^2 + y^2 + s^2 + t^2 + y)$$

Muestre que $(0, 1)$ es un valor regular de Φ y que el conjunto de nivel $\Phi^{-1}(0, 1)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^2$

Solución:

Sea $(x, y, s, t) \in \Phi^{-1}(0, 1)$ entonces

$$J\Phi(x, y, s, t) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 \\ 2x & 2y + 1 & 2s & 2t \end{pmatrix}$$

Caso 1: Si $s = t = 0$ entonces $y = \pm 1$, por lo que de hecho $y = -1$, $x = \pm 1$ y $\text{rango}(J\Phi(x, y, s, t)) = 2$

Caso 2: Si $s \neq 0$ o $t \neq 0$ entonces $\text{rango}(J\Phi(x, y, s, t)) = 2$.

Por tanto $\Phi^{-1}(0, 1) =: M$ es subvariedad suave de $\mathbb{R}^4$, así que la inclusión $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ es suave.

Consideremos la función

$$\psi = p \circ i : M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^3$$

con $p(x, y, s, t) = (x, s, t)$. Como ψ es composición de funciones suaves, también es suave. Notemos además que ψ es inyectiva. Así, notemos que

$$\psi^{-1} = i \circ j \circ F : \psi(M) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3 \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{F} M$$

con $F(x, y, s, t) = (x, -x^2, s, t)$ y $j(x, s, t) = (x, 0, s, t)$ (Checkear). Como F suave, tenemos que ψ es el difeomorfismo buscado si podemos probar que $\psi(M) = \mathbb{S}^2$ (así además $i : \psi(M) \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es mapa suave). Para esto último basta considerar la función $f : \psi(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, s, t) = \frac{(x,s,t)}{\|(x,s,t)\|}$.

3 Propuestos

1. ★☆☆ Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $F(x, y) = x^3 + xy + y^3$ ¿Qué conjuntos de nivel son subvariedades de $\mathbb{R}^2$?

2. ★★☆ Determinar los valores críticos de la función $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dada por

$$f(x, y, z) = \left(x^3 + y^3 + z^3, x^2 + y^2 + z^2\right)$$

y verificar que el conjunto de valores críticos es de medida nula. Deducir que las ecuaciones

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

definen una curva compacta de $\mathbf{R}^3$. Además calcule explícitamente el espacio tangente de la variedad y grafique (por ejemplo, en alguna calculadora gráfica) la curva (por ejemplo usando coordenadas esféricas a la MAT024). Debería obtener un gráfico así: