UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Ayudantía 1 MAT430: Variedades Topológicas

17 de marzo 2025

Profesor: Pedro Montero Ayudante: Mateo Hidalgo

1 Recuerdo

Definición 1.1. *Una* ***variedad topológica*** *es un espacio topológico Hausdorff, localmente euclidiano y segundo numerable. (Así, una variedad diferenciable será una variedad topológica con una atlas diferenciable).*

Definición 1.2. *Decimos que un espacio topológico es* ***numerable en el infinito*** *o* σ***-compacto*** *si se puede escribir como unión numerable de compactos.*

Definición 1.3. *Sea* X *un espacio topológico. Decimos que* X *es* ***metrizable*** *(resp.* ***completamente metrizable****) si admite una métrica* d *que induce su topología y hace a* X *un espacio métrico (resp. espacio métrico completo).*

Lema 1.1 (de Urysohn)**.** *Si* X *es un espacio topológico es segundo numerable y* T_3 *(es decir, Hausdorff y regular) entonces* X *es metrizable.*

Teorema 1. *Si* X *es un espacio topológico segundo numerable entonces todo cubrimiento abierto admite un subcubrimiento numerable.*

Definición 1.4 (Paracompacidad)**.** *Sea* M *un espacio topológico. Una colección* $\mathscr{X}$ *de subconjuntos de* M *se dice localmente finita si cada punto de* M *tiene una vecindad que intersecta a lo más finitos conjuntos de* $\mathscr{X}$*.*
Dado un cubrimiento $\mathscr{U}$ *de* M*, otro cubrimiento* $\mathscr{V}$ *es llamado un* ***refinamiento de*** $\mathscr{U}$ *si para cada* $V \in \mathscr{V}$ *existe un* $U \in \mathscr{U}$ *tal que* $V \subset U$*.*
Decimos que M *es* ***paracompacto*** *si cada cubrimiento abierto de* M *admite un refinamiento localmente finito.*

Teorema 2. *Toda variedad topológica es paracompacta.*

Teorema 3. *Una variedad topológica* M *tiene solo numerables componentes conexas y cada componente conexa es una variedad topológica con la topología inducida.*

2 Ejercicios

Lema 2.1. *Pruebe que si* (X, d) *es espacio métrico completo y* $U \subset X$ *es abierto entonces* U *admite, para su topología, una métrica que lo hace completo.*

Demostración 2.1. *En efecto, definamos*

$$f : U \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\operatorname{dist}(x, X \backslash U)}$$

esta es continua (cf. MAT225) y definamos

$$\rho : U \times U,\ \rho(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

es un ejercicio ver que ρ *es una métrica en* U *equivalente a* d *y que hace a* U *espacio métrico completo.*

Lema 2.2. *Si X es un espacio topológico compacto y Hausdorff entonces es regular.*

Demostración 2.2. *Sea $F \subset X$ cerrado y $x_0 \notin F$. Tenemos automáticamente que F es compacto. Como X es Hausdorff, para cada punto $p \in F$ podemos encontrar vecindades U_p de el punto p y V_p del punto x_0 tal que $U_p \cap V_p = \varnothing$.*
Los abiertos U_p forman un cubrimiento de F, por tanto tenemos un subcubrimiento finito $U_{p_1}, \ldots, U_{p_n}$.
Se hace claro que entonces $U := \cup U_{p_i}$ es una vecindad de F disjunta de $V := \cap V_{p_i}$ (que es vecindad de x_0).

Problema 1.

Pruebe que toda variedad topológica M es completamente metrizable.
Para esto siga los siguientes pasos

1. Argumente que admite compactificación de Alexandrov y que esta es segundo-numerable.

   Solución: En efecto, M es Hausdorff y sabemos que es localmente compacta, así que admite compactificación de Alexandrov $\hat{M}$.

   Para ver que $\hat{M}$ admite una base numerable, notamos que basta unir una base numerable de M junto con una base de vecindades numerable de ∞.

   Recordemos que las vecindades del infinito son de la forma $(M \backslash C) \cup \{\infty\}$ con C compacto. Para cada punto $p \in M$ consideremos una vecindad U_p de p, que por local compacidad, podemos asumir tiene clausura compacta. Por segunda numerabilidad, podemos considerar un subcubrimiento $\mathscr{U}$ de esos U_p que sea numerable.

   Así, todo compacto $K \subset M$ está cubierto por finitos abiertos de $\mathscr{U}$, digamos $U_1, \ldots, U_n$. Así $C_K := \bigcup \overline{U_i}$ es compacto y los conjuntos $(M \backslash C_K) \cup \{\infty\}$ forman una base de vecindades numerable de ∞.

2. Use el Lema 2.1 y el Lema de Urysohn para concluir.

   Solución: Tenemos que $\hat{M}$ es compacto Hausdorff, en particular es regular, además de segundo numerable, así que por el lema de Urysohn es metrizable, luego $M \subset \hat{M}$ es abierto dentro de un metrizable, concluimos.

Problema 2.

Si M es Hausdorff, localmente euclidiano entonces es σ-compacto si y solo si es segundo-numerable
Solución: En efecto, si $M = \bigcup K_i$ con K_i compactos, entonces cada K_i admite un cubrimiento de abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, el cual a su vez admite un subcubrimiento finito.
Pero cada abierto de este cubrimiento es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, por lo que es segundo numerable, uniendo estas bases obtenemos una base numerable para K_i, uniendo estas bases sobre todos los i concluimos.

Problema 3.

Supongamos que M es localmente euclidiano y Hausdorff. Muestre que M es segundo numerable si y solo si es paracompacto y tiene numerables componentes conexas.
Para esto, primero pruebe los siguientes lemas:

Lema 2.3. *Sea X un espacio topológico. Muestre que X es conexo si y solo si para todo cubrimiento abierto $\mathscr{U}$ y todo $x, y \in X$ existe una cadena en $\mathscr{U}$ que une x e y (es decir, $\exists U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{U}$ con $x \in U_1$, $Y \in U_n$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$).*

Demostración 2.3. *La condición de cadena implica conexidad pues si X no fuese conexo, entonces tiene una descomposición de X en dos componente disjuntas, abiertas, no-vacías U y V, y entonces para $x \in U$ e $y \in V$ no puede haber una cadena de x a y en el cubrimiento $\mathscr{U} = \{U, V\}$.*

Probemos ahora el recíproco. Sea $\mathscr{U}$ cualquier cubrimiento abierto de X y fijemos $x \in X$. Entonces definamos

$$O = \{y \in X \mid \text{ hay una cadena de } x \text{ a } y \text{ en } \mathscr{U}\}$$

Tenemos que O es no-vacío. Pues cualquier abierto de $\mathscr{U}$ que contenga a x es una cadena deseada.
O es abierto: sea $y \in O$, sea $x \in U_1, \ldots, U_n$ una cadena dada por la definición de O. Entonces para todo $z \in U_n$, esta misma cadena asegura que $z \in O$. Por tanto $U_n \subset O$.
O es cerrado: Supongamos que $y \notin O$, sea $U \in \mathscr{U}$ con $y \in U$. Supongamos por contradicción que existe $z \in U \cap O$, con $x \in U_1, \ldots, U_n$ una cadena dada por la def de O. Pero entonces podemos alargar la cadena a $x \in U_1, \ldots, U_n, U_{n+1} =: U$, que es también cadena de $\mathscr{U}$, pues las primeras intersecciones son no-vacías por hipótesis y $z \in U_n \cap U_{n+1} \neq \varnothing$. Pero entonces esta cadena une también x e y, así que $y \in O$, contradicción.
Deducimos que $O = X$

Lema 2: Pruebe que si $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto, precompacto, localmente finito de M entonces cada conjunto en $\mathscr{U}$ intersecta a lo más a finitos otros conjuntos de $\mathscr{U}$.

Demostración 2.4. *Sea $U \in \mathscr{U}$. Sea $p \in \overline{U}$ entonces, por definición de cubrimiento localmente finito tenemos que existe $V_p \in \mathscr{N}(p)$ que intersecta a solo finitos conjuntos en $\mathscr{U}$. Como $\overline{U}$ es compacto tenemos que $\overline{U} \subset \bigcup_{i=1}^n V_{p_i}$, pero entonces $\overline{U}$ también intersecta a solo finitos elementos en $\mathscr{U}$, por lo tanto lo mismo se puede decir de U. Concluimos.*

Solución Problema 3:
Si M es segundo numerable entonces M cumple nuestra definición de variedad, por lo que M es paracompacta y nos convencemos que tiene solo numerables componentes conexas.
El recíproco es más difícil. Supongamos M paracompacto, es claro que basta probar que cada componente conexas de M tiene una base numerable. Así, asumamos que M es conexo.
Sabemos que M tiene una base de bolas coordenadas precompactas, pero no a priori numerable. Por paracompacidad, podemos refinar esta base para obtener una base $\mathscr{U}$ localmente finita y precompacta. Sea $U_0 \in \mathscr{U}$. Definamos

$$\mathscr{V}_0 := \{U_0\},\ \mathscr{V}_{n+1} = \{U \in \mathscr{U} \mid \exists V \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{V}_i, U \cap V \neq \varnothing\} \setminus \bigcup_{i=0}^{n} \mathscr{V}_i$$

pero del lema de las cadenas es claro que $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathscr{V}_i$, y cada elemento de $\mathscr{V}_i$ es abierto precompacto. Deducimos que M es σ-compacto.
Concluimos en virtud del problema anterior.

3 Propuestos

1. ★☆☆ Terminar demostración del Lema 2.1
2. ★★☆ Encontrar una demostración corta de el lema de las cadenas para espacios topológicos conexos por caminos.
3. ★★★ De una demostración alternativa del Problema 2 ayudandose de las siguientes indicaciones:
   (a) Usando el lema de Urysohn pruebe que si un compacto Hausdorff es localmente metrizable, entonces es de hecho metrizable.
   (b) Muestre que un espacio separable y metrizable es segundo numerable.
4. ★★☆ Usar el teorema de Baire para mostrar que los irracionales con la topología usual forman un espacio no σ-compacto (pero sí segundo numerable). Mostrar que $\mathbb{R}$ con la topología cofinita es σ-compacto pero no segundo numerable.