

TAREA 3 – GEOMETRÍA ALGEBRAICA

PROFESOR: PEDRO MONTERO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Fecha de entrega: LUNES 2 DE NOVIEMBRE DE 2026, EN HORARIO DE CLASES.

Esta Tarea puede ser realizada en grupos de **a lo más 2 personas**. La entrega puede ser llevando la **tarea a mano** en clases o por **correo electrónico**, con copia al profesor y al ayudante.

En toda esta Tarea, $k = \bar{k}$ denota un cuerpo algebraicamente cerrado.

Problema 1

Supongamos en este problema que $\text{car}(k) \neq 2$, y consideremos la *cúbica nodal*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^2(x+1)\} \subseteq \mathbb{A}^2.$$

Recordemos que C **no** es normal: la función racional $t := \frac{y}{x} \in k(C)$ es entera sobre $\mathcal{O}(C)$, pues $t^2 = 1 + x$, pero $t \notin \mathcal{O}(C)$.

- (1) Probar que $\mathcal{O}(C)^\nu \cong k[t]$, y que la normalización de C está dada por

$$\nu_C : \mathbb{A}^1 \longrightarrow C, \quad t \longmapsto (t^2 - 1, t^3 - t).$$

Determinar el cardinal de $\nu_C^{-1}((0, 0))$.

- (2) Probar que ν_C es un morfismo finito y birracional que **no** es un isomorfismo, y explicar por qué esto no contradice el Teorema principal de Zariski.
- (3) Consideremos ahora la *cúbica cuspidal* $D = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^3\}$ y sea $s := \frac{y}{x} \in k(D)$. Probar que $\mathcal{O}(D)^\nu \cong k[s]$, que la normalización de D está dada por

$$\nu_D : \mathbb{A}^1 \longrightarrow D, \quad s \longmapsto (s^2, s^3),$$

y que ν_D es un morfismo finito, birracional y **biyectivo** que no es un isomorfismo.

Problema 2

Supongamos en este problema que $\text{car}(k) \neq 2$, y consideremos el **cono singular**

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } z^2 = xy\} \subseteq \mathbb{A}^3, \quad p = (0, 0, 0), \quad L = \{x = z = 0\} \subseteq X.$$

- (1) Probar que X es una variedad algebraica afín irreducible de dimensión 2 y que $\text{Sing}(X) = \{p\}$.
- (2) Verificar que un cambio lineal de coordenadas identifica X con el cono $\{x^2 + y^2 = z^2\} \subseteq \mathbb{A}^3$, y deducir que X es una variedad **normal**.
- (3) Probar que

$$\text{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

es un grupo cíclico generado por $[L]$, que cumple $[2L] = 0$ en $\text{Cl}(X)$.

Indicación: Usar que $\text{div}(x) = 2L$ y probar que L **no** es un divisor principal, así como que $X \setminus L \cong U$ donde $U \subseteq \mathbb{A}^2$ es un abierto no-vacío.

- (4) Probar que $L \in \text{WDiv}(X)$ **no** es un divisor de Cartier (i.e., no es *localmente principal*), pero que $2L$ sí es un divisor de Cartier.
- (5) Probar que $\text{Pic}(X) \cong \{0\}$.

Indicación: Usar que $\text{Pic}(X) \hookrightarrow \text{Cl}(X)$.

Problema 3

Sea $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, con coordenadas homogéneas $[x_0, x_1]$ e $[y_0, y_1]$ en cada factor, y para $a, b \in \mathbb{Z}$ consideremos el fibrado en rectas

$$\mathcal{O}_S(a, b) := \text{pr}_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \in \text{Pic}(S).$$

Recordemos que $(a, b) \mapsto \mathcal{O}_S(a, b)$ define un isomorfismo $\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(S)$.

- (1) Probar que $H^0(S, \mathcal{O}_S(a, b))$ se identifica con el k -espacio vectorial de polinomios bihomogéneos de bigrado (a, b) en (x_0, x_1) e (y_0, y_1) , y deducir que

$$\dim_k H^0(S, \mathcal{O}_S(a, b)) = \begin{cases} (a+1)(b+1) & \text{si } a \geq 0 \text{ y } b \geq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Indicación: Calcular las funciones de transición de $\mathcal{O}_S(a, b)$ en el cubrimiento de S por los abiertos $U_i \times V_j$, donde $U_i = \{x_i \neq 0\}$ y $V_j = \{y_j \neq 0\}$, y proceder como en el cálculo de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$.

- (2) Calcular el lugar de base $\text{Bs}(\mathcal{O}_S(a, b))$, y deducir que $\mathcal{O}_S(a, b)$ es **globalmente generado** si y sólo si $a \geq 0$ y $b \geq 0$.
- (3) Probar que $\mathcal{O}_S(a, b)$ es **muy amplio** si y sólo si $a \geq 1$ y $b \geq 1$.

Indicación: Para la suficiencia, identificar $\varphi_{\mathcal{O}_S(a, b)}$ con la composición del morfismo $\nu_a \times \nu_b$ y del incrustamiento de Segre. Para la necesidad, notar que si $b = 0$ entonces toda sección global de $\mathcal{O}_S(a, 0)$ es constante a lo largo de cada recta $\{p\} \times \mathbb{P}^1$.

- (4) Deducir que $\mathcal{O}_S(a, b)$ es **amplio** si y sólo si $a \geq 1$ y $b \geq 1$. Probar además que $\mathcal{O}_S(1, 0)$ es globalmente generado pero **no** es amplio, y calcular su dimensión de Iitaka $\kappa(\mathcal{O}_S(1, 0))$.