

TAREA 2 – GEOMETRÍA ALGEBRAICA

PROFESOR: PEDRO MONTERO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Fecha de entrega: MIÉRCOLES 30 DE SEPTIEMBRE DE 2026, HASTA LAS 23H59.

Esta Tarea puede ser realizada en grupos de **a lo más 2 personas**. La entrega es por **correo electrónico**, con copia al profesor y al ayudante.

En toda esta Tarea, $k = \bar{k}$ denota un cuerpo algebraicamente cerrado.

Problema 1

- (1) Probar que toda función regular en el espacio proyectivo definida globalmente es constante, i.e.,

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k.$$

Indicación: Una función regular definida globalmente puede restringirse a cada uno de los abiertos estándar $U_i = \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$.

- (2) Deducir que $\mathbb{P}^n$ **no** es una variedad algebraica afín para todo $n \geq 1$.
- (3) Sea X una variedad algebraica proyectiva, y supongamos que existe una incrustación cerrada $X \hookrightarrow Y$, donde Y es una variedad algebraica *afín*. Probar que X es un conjunto finito de puntos.
- (4) Deducir de (3) una segunda demostración de (2), y probar que ninguna variedad algebraica proyectiva irreducible de dimensión ≥ 1 es afín.

Problema 2

Supongamos en este problema que $\text{car}(k) \neq 2$. Una **cónica** es una hipersuperficie cuádrica de $\mathbb{P}^2$, i.e., $C = V(f) \subseteq \mathbb{P}^2$ donde $f \in k[X, Y, Z]$ es un polinomio homogéneo no-constante de grado 2.

- (1) Probar que, en una base conveniente, podemos escribir

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tal que } ax^2 + by^2 + cz^2 = 0\}$$

para ciertos $a, b, c \in k$.

- (2) Supongamos que $abc \neq 0$. Probar que, en una base conveniente, podemos escribir

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tal que } xz = y^2\},$$

y que

$$\nu : \mathbb{P}^1 \longrightarrow C, [s, t] \longmapsto [s^2, st, t^2]$$

es un isomorfismo. En particular, $C \cong \mathbb{P}^1$.

- (3) Analizar los casos degenerados $abc = 0$. Más precisamente, probar que si exactamente uno de los coeficientes a, b, c es nulo entonces C es la unión de dos rectas distintas de $\mathbb{P}^2$, mientras que si dos de ellos son nulos entonces C es una recta de $\mathbb{P}^2$. Determinar en cada caso si C es irreducible, y concluir para qué cónicas se tiene que $C \cong \mathbb{P}^1$.

Problema 3

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica afín irreducible, y sean $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(X)$ funciones regulares que no se anulan simultáneamente en X . Denotemos por $U := X \setminus V(f_1, \dots, f_r)$ el abierto denso correspondiente, por

$$f : U \longrightarrow \mathbb{P}^{r-1}, x \longmapsto [f_1(x), \dots, f_r(x)]$$

al morfismo regular asociado, y por $\tilde{X} := \overline{\Gamma_f}^{\text{Zar}} \subseteq X \times \mathbb{P}^{r-1}$ la adherencia de Zariski de su grafo. Recordemos que el **blow-up** de X en $f_1, \dots, f_r$ es el morfismo $\varepsilon : \tilde{X} \rightarrow X$ inducido por la primera proyección.

(1) Probar que

$$\tilde{X} \subseteq \{(x, [y]) \in X \times \mathbb{P}^{r-1} \text{ tal que } y_i f_j(x) = y_j f_i(x) \text{ para todos } i, j \in \{1, \dots, r\}\}.$$

(2) Consideremos la *cúbica nodal*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^2(x+1)\} \subseteq \mathbb{A}^2.$$

Calcular la transformada estricta $\tilde{C}$ en el blow-up de $\mathbb{A}^2$ en (x, y) .

(3) Supongamos que $\text{car}(k) \neq 2$. Probar que $\tilde{C}$ es una variedad algebraica suave, que el morfismo inducido $\varepsilon|_{\tilde{C}} : \tilde{C} \rightarrow C$ es birracional, y que $\varepsilon^{-1}((0, 0)) \cap \tilde{C}$ consta de exactamente dos puntos.

Problema 4

Supongamos en este problema que $\text{car}(k) \neq 2$, y consideremos la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } y^2 = x^2 z\} \subseteq \mathbb{A}^3,$$

llamada el **paraguas de Whitney**.

(1) Probar que $Y^2 - X^2 Z$ es un polinomio irreducible de $k[X, Y, Z]$. Deducir que $\mathcal{I}(S) = \langle Y^2 - X^2 Z \rangle$ y que S es una variedad algebraica afín irreducible de dimensión 2.

(2) Consideremos

$$\varphi : \mathbb{A}^2 \longrightarrow S, (u, t) \longmapsto (u, ut, t^2).$$

Probar que φ es un morfismo regular sobreyectivo, determinar todas sus fibras, y verificar con ello el teorema de dimensión de las fibras.

(3) Probar que φ induce un isomorfismo entre el abierto $\{u \neq 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$ y el abierto $S \cap \{x \neq 0\} \subseteq S$. Deducir que S es una variedad algebraica **racional**, y calcular el cuerpo de funciones racionales $k(S)$.

(4) Calcular el espacio tangente de Zariski $T_p S$ para todo $p \in S$, y deducir que el conjunto de puntos singulares de S es la recta $L = \{x = y = 0\} \cong \mathbb{A}^1$.