

TAREA 1 – GEOMETRÍA ALGEBRAICA

PROFESOR: PEDRO MONTERO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Fecha de entrega: LUNES 24 DE AGOSTO DE 2026, EN CLASES.

Esta Tarea puede ser realizada en grupos de **a lo más 2 personas**.

Problema 1

Sea X un espacio topológico y sea $\mathbf{Top}(X)$ la categoría cuyos objetos son los abiertos de X , y cuyos morfismos están dados por

$$\mathrm{Hom}(U, V) = \begin{cases} \{\iota : U \hookrightarrow V\} & \text{si } U \subseteq V, \\ \emptyset & \text{si } U \not\subseteq V, \end{cases}$$

i.e., es un conjunto cuyo único elemento es la función inclusión si $U \subseteq V$, o bien el conjunto vacío en caso contrario.

- (1) Describir geoméricamente la composición de morfismos en $\mathbf{Top}(X)$. Probar además que dos abiertos $U, V \subseteq X$ son isomorfos en $\mathbf{Top}(X)$ si y sólo si $U = V$.
- (2) Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Probar que dar un prehaz $\mathcal{F}$ en X con valores en $\mathcal{C}$ es equivalente a dar un functor contravariante

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}(X) \longrightarrow \mathcal{C}.$$

- (3) Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos prehaces en X con valores en $\mathcal{C}$. Probar que dar un morfismo de prehaces $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es equivalente a dar una transformación natural entre los funtores contravariantes asociados a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ en (2).

Problema 2

Sea $X = \mathbb{R}^n$, sea $\mathcal{C}^\infty$ el haz de funciones diferenciables en X y sea $x \in X$ un punto. Denotamos por $\mathcal{C}_x^\infty$ al tallo de $\mathcal{C}^\infty$ en x , cuyos elementos son los gérmenes $[(f, U)]$ de funciones diferenciables $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en alguna vecindad abierta $x \in U \subseteq X$.

- (1) Verificar que las operaciones inducidas por las de $\mathcal{C}^\infty(U)$ están bien definidas en $\mathcal{C}_x^\infty$, y que $\mathcal{C}_x^\infty$ es un anillo (conmutativo con unidad). Verificar además que la condición $f(x) = 0$ no depende del representante escogido del germen, de modo que

$$\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{C}_x^\infty \text{ tal que } f(x) = 0\}$$

es un ideal de $\mathcal{C}_x^\infty$.

- (2) Probar que el morfismo de evaluación

$$\mathrm{ev}_x : \mathcal{C}_x^\infty \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto f(x)$$

es un morfismo sobreyectivo de anillos tal que $\mathfrak{m}_x = \ker(\mathrm{ev}_x)$. Deducir que $\mathfrak{m}_x$ es un ideal maximal de $\mathcal{C}_x^\infty$ y que $\mathcal{C}_x^\infty / \mathfrak{m}_x \cong \mathbb{R}$.

- (3) Probar que todo germen $f \in \mathcal{C}_x^\infty \setminus \mathfrak{m}_x$ es invertible en $\mathcal{C}_x^\infty$, y concluir que $\mathfrak{m}_x$ es el *único* ideal maximal de $\mathcal{C}_x^\infty$, i.e., que $\mathcal{C}_x^\infty$ es un **anillo local**.

Indicación: Si $f(x) \neq 0$, entonces f no se anula en una vecindad abierta de x .

- (4) Deducir que $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$ es un espacio anillado en $\mathbb{R}$ -álgebras, todos cuyos tallos son anillos locales.

Problema 3

Recordemos que un espacio topológico no-vacío X es **irreducible** si no es la unión de dos subconjuntos cerrados estrictos. En lo que sigue, $k = \bar{k}$ denota un cuerpo algebraicamente cerrado.

- (1) Sea X un espacio topológico no-vacío. Probar que X es irreducible si y sólo si se satisface alguna de las condiciones equivalentes siguientes:

- a) Todo par de abiertos no-vacíos de X se intersectan.
- b) Todo abierto no-vacío de X es denso.

- (2) Deducir que si X es un espacio topológico irreducible con más de un punto, entonces X **no** es un espacio de Hausdorff.
- (3) Probar que todo abierto no-vacío $U \subseteq X$ de un espacio topológico irreducible X es irreducible respecto a la topología inducida.
- (4) Probar que los cerrados propios de $\mathbb{A}^1$ para la topología de Zariski son exactamente los subconjuntos finitos, i.e., que la topología de Zariski de $\mathbb{A}^1$ coincide con la topología cofinita. Deducir de (1) que $\mathbb{A}^1$ es irreducible, y probar directamente que $\mathbb{A}^1$ es quasi-compacto.

Problema 4

Sea $k = \bar{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y consideremos la parábola $C \subseteq \mathbb{A}^2$ dada por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y = x^2\}.$$

- (1) Probar que $\mathcal{I}(C) = \langle X^2 - Y \rangle$ en $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2) = k[X, Y]$, y deducir que C es una subvariedad afín irreducible de $\mathbb{A}^2$.

Indicación: Probar que $X^2 - Y$ es un polinomio irreducible de $k[X, Y]$ y utilizar el Hilbert Nullstellensatz.

- (2) Demostrar que las funciones

$$f : C \longrightarrow \mathbb{A}^1, (x, y) \longmapsto x \quad \text{y} \quad g : \mathbb{A}^1 \longrightarrow C, t \longmapsto (t, t^2)$$

son morfismos regulares e inversas una de la otra. En particular, f es un isomorfismo.

- (3) Describir explícitamente el pullback

$$f^* : \mathcal{O}(\mathbb{A}^1) \longrightarrow \mathcal{O}(C)$$

y verificar que es un isomorfismo de k -álgebras.