

Geometría Algebraica

Clase 19

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

19 DE OCTUBRE DE 2026

§3.6 FIBRADO TANGENTE, COTANGENTE Y NORMAL

CONSTRUCCIÓN DE Ω_X^1 Y T_X

Construcción: Sea X variedad **suave** irreducible de $\dim(X) = n$, i.e., $\dim_k(T_x X) = \dim(X) = n$ para todo $x \in X$. Construyamos T_X fibrado vectorial tal que $(T_X)_x := T_{X,x} \cong T_x X \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee$:

Para todo $x \in X$ se define $\Omega_{X,x}^1 := T_{X,x}^\vee \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ cubrimiento abierto de X y para $i \in I$ sean $u_1^i, \dots, u_n^i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ **coordenadas locales**, i.e., funciones regulares tales que sus diferenciales $du_1^i, \dots, du_n^i$ forman una base de $\Omega_{X,x}^1$ para todo $x \in U_i$.

En $\emptyset \neq U_i \cap U_j$ consideramos $J_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_n(k)$ que permite pasar de la base $\{du_1^j, \dots, du_n^j\}$ a $\{du_1^i, \dots, du_n^i\}$ para todo punto $x \in U_i \cap U_j$. En particular, dichas matrices (jacobianas) verifican la condición de cociclo

$$J_{ij}J_{jk} = J_{ik} \text{ en } U_i \cap U_j \cap U_k \quad (\text{regla de la cadena})$$

y definen Ω_X^1 fibrado vectorial, con $\Omega_{X,x}^1 \cong$ espacio cotangente en $x \in X$. Así, $T_X := (\Omega_X^1)^\vee$ cumple $T_{X,x} \cong T_x X$ para todo $x \in X$.

FIBRADOS TANGENTE Y COTANGENTE

Sea X variedad **suave** irreducible, el fibrado de rango $\dim(X)$ dado por:

- ❶ T_X es llamado el **fibrado tangente** de X .
- ❷ Ω_X^1 es llamado el **fibrado cotangente** de X .

Para $\emptyset \neq U \subseteq X$ abierto las secciones de $H^0(U, T_X|_U)$ y $H^0(U, \Omega_X^1|_U)$ son llamadas **campos de vectores** y **1-formas diferenciales** en U , resp.

Ejemplo importante: Más generalmente, si $p \in \{1, \dots, n\}$ el **fibrado de p -formas diferenciales** en X se define mediante $\Omega_X^p := \Lambda^p \Omega_X^1$.

Luego, si $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}_X(U)$ son coordenadas locales en $U \subseteq X$, entonces $s \in H^0(U, \Omega_X^p|_U)$ es de la forma

$$s(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} f_{j_1, \dots, j_p}(x) d_x u_{j_1} \wedge \dots \wedge d_x u_{j_p} \text{ con } f_{j_1, \dots, j_p}(x) \in \mathcal{O}_X(U).$$

En particular, $\text{rg}(\Omega_X^p) = \binom{n}{p}$ donde $n = \dim(X)$.

EL DIFERENCIAL $df : T_X \rightarrow f^*T_Y$, T_f Y Ω_f^1

La construcción de T_X es **functorial**:

Si $f : X \rightarrow Y$ morfismo regular entre variedades suaves irreducibles, entonces $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y \stackrel{\text{def}}{=} (f^* T_Y)_x$ induce un morfismo de fibrados **en X**

$df : T_X \longrightarrow f^* T_Y$ llamado la **diferencial** de f .

Así, $f : X \rightarrow Y$ **morfismo suave** si $df : T_X \twoheadrightarrow f^* T_Y$ sobreyectivo, i.e.,

$$0 \longrightarrow T_{X/Y} \longrightarrow T_X \xrightarrow{df} f^* T_Y \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $T_{X/Y} \stackrel{\text{def}}{=} T_f := \ker(df)$ es el **fibrado tangente relativo** y cumple que $(T_f)_x \stackrel{\text{def}}{=} (T_{X/Y})_x \cong T_x(f^{-1}(f(x)))$ para todo $x \in X$.

El **fibrado cotangente relativo** $\Omega_f^1 \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_{X/Y}^1 := (T_{X/Y})^\vee$ de un morfismo suave $f : X \rightarrow Y$ cumple $0 \longrightarrow f^* \Omega_Y^1 \longrightarrow \Omega_X^1 \twoheadrightarrow \Omega_{X/Y}^1 \longrightarrow 0$.

- ❶ Si X e Y variedades suaves irreducibles, $T_{X \times Y} \cong \text{pr}_X^* T_X \oplus \text{pr}_Y^* T_Y$.
- ❷ $T_{\mathbb{A}^n} \cong \mathbb{A}^n \times k^n$ es el **fibrado trivial** de rango n : identificando $T_{\mathbb{A}^n}$ con su haz de secciones y considerando coordenadas **globales** $x_1, \dots, x_n$ de $\mathbb{A}^n$, los campos de vectores $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in H^0(\mathbb{A}^n, T_{\mathbb{A}^n})$ dados por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, p} \longrightarrow k, f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \text{ para todo } p \in \mathbb{A}^n$$

generan $H^0(U, T_{\mathbb{A}^n}|_U)$ para todo abierto $U \subseteq \mathbb{A}^n$. Así, $T_{\mathbb{A}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}^{\oplus n}$.

La siguiente definición proviene de la Geometría Diferencial.

Una variedad suave irreducible X es **paralelizable** si $T_X \cong X \times k^{\dim(X)}$ es el fibrado trivial, i.e., $T_X \cong \mathcal{O}_X^{\oplus \dim(X)}$ en términos de haces de secciones.

GRUPOS ALGEBRAICOS

Sea G un grupo algebraico **irreducible**. Entonces, G es paralelizable.

Prueba (Mumford): G es **suave** (al ser un espacio homogéneo). Sea $e \in G$ neutro y $\mathfrak{g} := T_e G$. Para $g \in G$ consideramos el morfismo regular

$$L_g : G \longrightarrow G, h \longmapsto gh \text{ con diferencial } d_e L_g : \mathfrak{g} \longrightarrow T_g G$$

Veamos que $\varphi : G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} T_G, (g, v) \longmapsto (d_e L_g)(v)$ isomorfismo de fibrados:

Sea $E := G \times \mathfrak{g}$ trivial y $F := T_G$, con haces respectivos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$, entonces $\varphi_x : E_x \cong \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x \xrightarrow{\sim} F_x \cong \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x$ isomorfismo de k -e.v. (G suave).

El **Lema de Nakayama** implica que $\varphi_x : \mathcal{E}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x$ isomorfismo de tallos $\forall x \in G$. Así, $\varphi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ isomorfismo de haces, i.e., $T_G \cong G \times \mathfrak{g}$ trivial. $\square$

Caso particular: $\mathbb{G}_a^n \stackrel{\text{def}}{=} (k^n, +) \cong \mathbb{A}^n$, $\mathbb{G}_m^n \stackrel{\text{def}}{=} ((k^*)^n, \times)$, $\text{GL}_n(k)$, $\text{SL}_n(k)$, $\text{PGL}_n(k)$, etc. son paralelizables. Si A es una **variedad abeliana** (i.e., grupo algebraico irreducible proyectivo), entonces $T_A \cong \mathcal{O}_A^{\oplus \dim(A)}$ trivial.

Sucesión exacta de Euler

Sea $V \cong k^{n+1}$ un k -e.v. y $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$. Entonces, hay una sucesión exacta de fibrados vectoriales en $\mathbb{P}(V)$, llamada la **sucesión exacta de Euler**

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \longrightarrow T_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0,$$

o equivalentemente $0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}(V)}^1 \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0$.

Aquí, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$ es el fibrado en rectas trivial y $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)}$.

Prueba: En $V \cong \mathbb{A}^{n+1}$ con coord. $x_0, \dots, x_n$, $\frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ son generadores de $T_{\mathbb{A}^{n+1}}$. Sin embargo, si $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ homogéneos de grado d , entonces (como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ homogéneos de grado $d-1$) la fórmula de Leibniz implica

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f}{g} \right) (\lambda x) = \frac{\lambda^{d+d-1}}{\lambda^{2d}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f}{g} \right) (x)$$

y luego $\frac{\partial}{\partial x_i}$ **no está bien definido** en $\mathbb{P}^n$, pero $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ **sí lo está**.

Sea $x = [\ell] \in \mathbb{P}(V)$. Como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{[\ell]} \stackrel{\text{def}}{=} \ell$, tenemos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)_{[\ell]} \stackrel{\text{def}}{=} \ell^\vee = \{\varphi : \ell \rightarrow k \text{ lineal}\}$ dual de $\ell \cong k$. Construyamos $\Phi : V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \rightarrow T_{\mathbb{P}(V)}$:

Para $v \in V$ y $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)_{[\ell]} \stackrel{\text{def}}{=} \ell^\vee$, sea $\Phi(v \otimes \varphi) := \partial_{v \otimes \varphi} \in T_{\mathbb{P}(V), [\ell]}$ la aplicación lineal $\partial_{v \otimes \varphi}(f) := \varphi(x) \frac{\partial f}{\partial v}(x)$ para todo germen $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V), [\ell]}$, la cual es independiente del vector $x \in \ell \setminus \{0\}$ escogido.

Φ sobreyectivo: En $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ notar que $\varphi_0 = x_0 = 1$ y los $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $v = e_i$ generan $T_{U_0} \cong T_{\mathbb{A}^n}$ via Φ . Análogamente para cada $U_i \cong \{x_i \neq 0\}$.

$L := \ker(\Phi) \in \text{Pic}(\mathbb{P}(V))$ es trivial: Sea $s := \sum_{i=0}^n e_i \otimes e_i^*$ sección global nunca nula, con $\Phi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$ por la fórmula de Euler (Clase 12):

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \deg(f) \cdot f \stackrel{\text{def}}{=} 0 \cdot f = 0 \text{ para todo } f = \frac{g_d}{h_d} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V), [\ell]}.$$

Así, $s \in H^0(\mathbb{P}(V), L)$ sección global nunca nula, i.e., $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$ trivial. $\square$

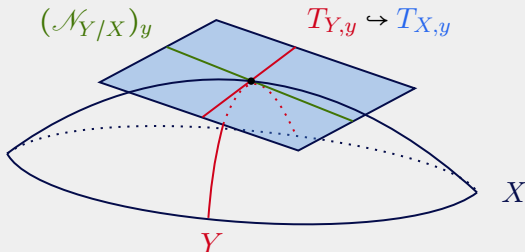
FIBRADO NORMAL Y CONORMAL

Sea $\iota : Y \hookrightarrow X$ sub-variedad suave irreducible de X (que también lo es). Así, para todo $y \in Y$ el diferencial

$$d_y \iota : T_y Y \longrightarrow T_y X \stackrel{\text{def}}{=} (\iota^* T_X)_y \stackrel{\text{def}}{=} (T_X|_Y)_y$$

es **inyectivo**, i.e., $d\iota : T_Y \hookrightarrow T_X|_Y$ es un sub-fibrado vectorial.

El **fibrado normal** de Y en X es el cociente $\mathcal{N}_{Y/X} := (T_X|_Y)/T_Y$, donde $\text{rg}(\mathcal{N}_{Y/X}) = \dim(X) - \dim(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{codim}_X(Y)$.



FIBRADO NORMAL Y CONORMAL

Como $\mathcal{N}_{Y/X} := \text{coker}(d\iota) \stackrel{\text{def}}{=} (T_X|_Y)/T_Y$, hay una sucesión exacta en Y :

$$0 \longrightarrow T_Y \xrightarrow{d\iota} T_X|_Y \longrightarrow \mathcal{N}_{Y/X} \longrightarrow 0$$

o equivalentemente se tiene la sucesión exacta dual

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{Y/X}^\vee \longrightarrow \Omega_X^1|_Y \xrightarrow{{}^t d\iota} \Omega_Y^1 \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{N}_{Y/X}^\vee$ es el **fibrado conormal** de Y en X .

Veremos que el fibrado normal es especialmente fácil de comprender en el caso de sub-variedades definidas por secciones de un fibrado vectorial.

CASO $V(s)$ CON $s \in H^0(X, E)$

Construcción: Sea $E \rightarrow X$ fibrado de $\operatorname{rg}(E) = r$ y $s \in H^0(X, E) \setminus \{0\}$. En una trivialización $E|_U \cong U \times \mathbb{A}^r$ escogemos secciones $(e_1, \dots, e_r)$ tales que $(e_1(x), \dots, e_r(x))$ base de $E_x \cong k^r$ para todo $x \in U$, y escribimos

$$s = \sum_{i=1}^r f_i e_i \text{ donde } f_i \in \mathcal{O}_X(U) \text{ función regular.}$$

Luego $V(s) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0\} \subseteq X$ está dado localmente por $V(s)|_U = V(f_1, \dots, f_r)$. Así, para $x \in V(s)$ definimos la aplicación k -lineal

$$d_x s : T_x X \longrightarrow E_x$$

mediante $d_x s := \sum_{i=1}^r d_x f_i \cdot e_i(x)$ (localmente en U), donde $d_x f_i : T_x X \rightarrow T_{f_i(x)} \mathbb{A}^1 \cong k$, la cual es independiente de los f_i y e_i siempre que $x \in V(s)$.

Decimos que $s : X \rightarrow E$ es **transversal a la sección nula** si

$$d_x s : T_x X \twoheadrightarrow E_x \text{ es sobreyectiva para todo } x \in V(s).$$

En particular, $\operatorname{rg}(E) \leq \dim(X) = n$ en tal caso.

CASO $V(s)$ CON $s \in H^0(X, E)$

Sea $E \rightarrow X$ fibrado de $\text{rg}(E) = r \leq n$ y $s \in H^0(X, E) \setminus \{0\}$. Entonces:

- ❶ s es transversal a la sección nula $\Leftrightarrow V(s) \subseteq X$ sub-variedad **suave** de $\dim(V(s)) = n - r$. Más aún, en tal caso $\mathcal{N}_{V(s)/X} \cong E|_{V(s)}$.
- ❷ (**car**(k) = 0): Sea $M \subseteq H^0(X, E)$ globalmente generado^a. Entonces, para $s \in M$ **sección general** la sub-variedad $V(s) \subseteq X$ es suave.

^ai.e., la aplicación $\text{ev}_x : M \rightarrow E_x, s \mapsto s(x)$ sobreyectiva para todo $x \in X$

Prueba: Para (1), sea $V(s)|_U = V(f_1, \dots, f_r)$ como antes y sea $s : X \rightarrow E$ con $d_x s : T_x X \rightarrow E_x, v \mapsto \sum_{i=1}^r d_x f_i(v) \cdot e_i(x)$ sobreyectiva $\forall x \in V(s)$. Así, los $d_x f_i$ son l.i. y $\exists u_1 = f_1, \dots, u_r = f_r, u_{r+1}, \dots, u_n$ coord. locales en U . Luego, $V(f_1, \dots, f_r)$ es suave de dimensión $n - r$.

Si $Y := V(s)$ suave de dimensión $\dim(Y) = n - r$, entonces

$$\dim_k T_y Y = n - r \text{ para todo } y \in Y, \text{ donde } T_y Y \cong \ker(d_y s).$$

Luego, el teorema del rango implica que $d_y s$ es sobreyectiva para todo $y \in Y$.

CASO $V(s)$ CON $s \in H^0(X, E)$

Así, en el caso (1) tenemos isomorfismos canónicos

$E_y = \text{Im}(d_y s) \cong T_y Y / \ker(d_y s) \cong T_y X / T_y Y \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{N}_{Y/X})_y$ para todo $y \in Y$,
i.e., $\mathcal{N}_{Y/X} \cong E|_Y$. El ítem (2) se tiene por suavidad genérica (**Ejercicio**). $\square$

Ejemplo importante

Sea $E := L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ con $L_i \in \text{Pic}(X)$ y $s_i \in H^0(X, L_i) \setminus \{0\}$ tales que

$Y := V(s_1, \dots, s_r) \subseteq X$ suave irreducible de $\text{codim}_X(Y) = r$,

entonces $\mathcal{N}_{Y/X} \cong (L_1 \oplus \cdots \oplus L_r)|_Y \cong L_1|_Y \oplus \cdots \oplus L_r|_Y$. En particular, si $r = 1$ e $Y = V(s)$ es una hipersuperficie suave entonces

$$\mathcal{N}_{Y/X} \cong L|_Y, \text{ donde } L \cong \mathcal{O}_X(Y).$$

Es común el abuso de notación “ $Y|_Y$ ” para referirse a $\mathcal{O}_X(Y)|_Y \in \text{Pic}(Y)$.

§3.7 DIVISOR CANÓNICO Y DIMENSIÓN DE KODAIRA

EL FIBRADO CANÓNICO $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X)$

El **fibrado en rectas canónico** de X variedad suave irreducible es

$$\omega_X := \det(\Omega_X^1) \cong \Lambda^{\dim(X)} \Omega_X^1.$$

Un **divisor canónico** es cualquier $K_X \in \text{Div}(X) \cong \text{WDiv}(X)$ tal que

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X) \text{ en } \text{Pic}(X).$$

El dual $\omega_X^\vee \cong \mathcal{O}_X(-K_X)$ es el **fibrado anti-canónico**, y $-K_X$ es llamado un **divisor anti-canónico**.

- ❶ Como $T_{\mathbb{A}^n} \cong \Omega_{\mathbb{A}^n}^1 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}^{\oplus n}$, $\omega_{\mathbb{A}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$ y $K_{\mathbb{A}^n} = 0$ es un divisor canónico.
- ❷ Si G grupo algebraico irreducible (e.g. variedad abeliana), $\omega_G \cong \mathcal{O}_G$.
- ❸ La sucesión de Euler $0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$ implica que $\det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)}) \cong \det(\Omega_{\mathbb{P}^n}^1) \otimes \det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$, i.e.,

$$\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \text{ en } \text{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$$

y $K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)H$ un divisor canónico, con $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ hiperplano.

FÓRMULA DE ADJUNCIÓN

Fórmula de Adjunción

Sea $E \rightarrow X$ fibrado de $\operatorname{rg}(E) = r \leq n$ y $s \in H^0(X, E) \setminus \{0\}$ tal que $Y := V(s) \subseteq X$ sub-variedad suave de $\dim(Y) = n - r$. Entonces,

$$\omega_Y \cong \omega_X|_Y \otimes \det(\mathcal{N}_{Y/X}) \cong (\omega_X \otimes \det(E))|_Y.$$

Luego, si $Y \subseteq X$ **hipersuperficie** y $L \cong \mathcal{O}_X(Y)$ en $\operatorname{Pic}(X)$, entonces

$$\omega_Y \cong (\omega_X \otimes L)|_Y \text{ en } \operatorname{Pic}(Y),$$

i.e., $K_Y = (K_X + Y)|_Y$ en $\operatorname{Div}(Y) \cong \operatorname{WDiv}(Y)$.

Prueba: Como s transversal a la sección nula, $\mathcal{N}_{Y/X} \cong E|_Y$. La sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{Y/X}^\vee \longrightarrow \Omega_X^1|_Y \twoheadrightarrow \Omega_Y^1 \longrightarrow 0$$

implica que tenemos que

$$\omega_X|_Y \stackrel{\text{def}}{=} \det(\Omega_X^1|_Y) \cong \det(\mathcal{N}_{Y/X}^\vee) \otimes \det(\Omega_Y^1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathcal{N}_{Y/X})^\vee \otimes \omega_Y,$$

i.e., $\omega_Y \cong \omega_X|_Y \otimes \det(\mathcal{N}_{Y/X})$. □

HIPERSUPERFICIES DE $\mathbb{P}^n$

Si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ proyectiva irreducible, definimos $\mathcal{O}_X(d) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X$ en $\text{Pic}(X)$.

Ejemplo importante: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie suave irreducible de grado d . Por la fórmula de adjunción tenemos que

$$\omega_X \cong (\omega_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(X))|_X \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))|_X \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X(d-n-1).$$

Inductivamente (**Ejercicio**), si $X = X_{d_1, \dots, d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ **intersección completa** suave irreducible dada por $V(f_1, \dots, f_r)$ con $\deg(f_i) = d_i$, entonces

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X\left(-n-1 + \sum_{i=1}^r d_i\right).$$

E.g. si $C \subseteq \mathbb{P}^2$ curva suave de grado d entonces $\omega_C \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_C^1 \cong \mathcal{O}_C(d-3)$.

Si C posee estructura de grupo (i.e., es una **variedad abeliana**) entonces $d = 3$. El **Teorema de Abel-Jacobi** implica que si $d = 3$ entonces C posee estructura de grupo abeliano. Decimos que C es una **curva elíptica**.

LOS BLOQUES DE LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA

La positividad de K_X permite distinguir 3 tipos importantes de variedades.

Sea X variedad proyectiva suave irreducible. Decimos que X es una

- ❶ **Variedad de Fano** si $\omega_X^\vee \cong \mathcal{O}_X(-K_X)$ es amplio.
- ❷ **Variedad de Calabi-Yau^a** si $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ es trivial.
- ❸ **Variedad canónicamente polarizada** si $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X)$ es amplio.

^aEs común relajar la definición de variedad de Calabi-Yau pidiendo simplemente que K_X sea *numéricamente trivial*, i.e., $K_X \cdot C = 0$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$.

Ejemplo: Sea $X = X_{d_1, \dots, d_r} = V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{P}^n$ **intersección completa** suave irreducible con $\deg(f_i) = d_i$. Por la fórmula de adjunción:

- ❶ X variedad de Fano $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r d_i \leq n$.
- ❷ X variedad de Calabi-Yau $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r d_i = n + 1$.
- ❸ X variedad canónicamente polarizada $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r d_i \geq n + 2$.

Ejercicio: Si X Fano y si $Y \in |-K_X|$ suave irreducible, Y es Calabi-Yau.

PLURIGÉNEROS

Sea X variedad proyectiva suave irreducible. Para $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, el m -ésimo plurigénero de X está dado por

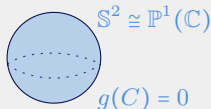
$$P_m(X) := \dim_k H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X)).$$

Decimos que $p_g(X) := P_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k H^0(X, \omega_X) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X))$ es el **género geométrico** de X .

Para una **curva algebraica** C escribimos $g(C) := p_g(C)$, y decimos que

$$g(C) := \dim_k H^0(C, \omega_C) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k H^0(C, \Omega_C^1) \text{ es el } \mathbf{género} \text{ de } C.$$

Si $k = \mathbb{C}$, la **Teoría de Hodge** implica que el género $g(C)$ es la cantidad de “agujeros” de C como superficie **real** compacta orientable.



Sea X variedad proyectiva suave irreducible de $\dim(X) \geq 1$ y $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ **amplio**, entonces $H^0(X, \mathcal{O}_X(-mD)) = 0$ para todo $m \geq 1$.

Prueba: Sea $m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ con $M := \mathcal{O}_X(m_0 D)$ muy amplio y sea $\varphi_M : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Por definición, $\varphi_{M^{\otimes m}} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n \xrightarrow{\nu_m} \mathbb{P}^N$ es la composición con el incrustamiento de Veronese. Así, $\mathcal{O}_X(mm_0 D)$ es muy amplio.

Por otra parte, si existiera $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(-mD))$ no-nula, entonces $s^{\otimes m_0} \in H^0(X, \mathcal{O}_X(-mm_0 D)) \setminus \{0\}$ y $\mathcal{O}_X(mm_0 D)$ sería trivial, **contradicción**. $\square$

Ejemplos: Sea X variedad proyectiva suave irreducible.

- 1 Si X Fano, $P_m(X) = 0$ para todo $m \geq 1$ pues $\mathcal{O}_X(-K_X)$ amplio.
- 2 Si X Calabi-Yau, $P_m(X) = 1$ para todo $m \geq 1$ pues $\mathcal{O}_X(K_X) \cong \mathcal{O}_X$.