

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 18

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

5 DE OCTUBRE DE 2026

§3.4 DIVISORES DE WEIL Y DIVISORES DE CARTIER

CÁLCULO EXPLÍCITO DE $\text{Pic}(X)$

Dado que $\text{Cl}(X) \cong \text{Pic}(X)$ para X suave e irreducible, calculamos:

- 1 Sea $U \subseteq \mathbb{A}^n$ un abierto no-vacío. Entonces, $\text{Pic}(U) \cong \{0\}$ es trivial¹
- 2 Si $H \subseteq \mathbb{P}^n$ hiperplano, entonces $\text{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \text{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}[H] \cong \mathbb{Z}$.

Si $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ entonces $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \setminus \{0\}$ define $Y := V(s) \subseteq \mathbb{P}^n$ de grado d . Así, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(Y) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y $\text{Pic}(\mathbb{P}^n) = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(H) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \rangle$.
Más aún, el sistema lineal

$$|Y| \stackrel{\text{def}}{=} \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim Y\} \cong \mathbb{P} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$$

parametriza hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}^n$.

¹El **Teorema de Quillen-Suslin** (1976) señala que *todo* fibrado vectorial (de rango arbitrario) en $\mathbb{A}^n$ es trivial. Por este resultado Quillen obtuvo la medalla Fields en 1978.

CÁLCULO EXPLÍCITO DE $\text{Pic}(X)$

- ③ Sea X variedad suave e irreducible y $Z \subseteq X$ subvariedad suave e irreducible tal que $\text{codim}_X(Z) \geq 2$. Sea $\varepsilon: \tilde{X} := \text{Bl}_Z(X) \rightarrow X$ el blow-up de $Z \subseteq X$, con divisor excepcional $E \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1}(Z)$. Entonces,

$$\text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \text{Pic}(\tilde{X}), (L, m) \mapsto \varepsilon^* L \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mE)$$

es sobreyectivo. Veamos que es inyectivo, i.e., para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se tiene que $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mE)$ no es trivial en $\text{Pic}(\tilde{X}) \cong \text{Cl}(\tilde{X})$:

Si $\exists g \in k(\tilde{X})^*$ tal que $\text{div}(g) = mE$ en $\text{WDiv}(\tilde{X})$, $\varepsilon^*: k(X) \xrightarrow{\sim} k(\tilde{X})$ permite considerar $G := (\varepsilon^*)^{-1}(g) \in k(X)^*$ que por definición cumple que $\text{div}(G) = 0$ en $\text{WDiv}(X)$. Así, G función regular que no se anula, y luego $g \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^*(G) = G \circ \varepsilon$ también, i.e., $m = 0$. En resumen, tenemos

$$\text{Pic}(\tilde{X}) = \varepsilon^* \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}[\mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)] \cong \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

En particular, tenemos que $\text{Pic}(\text{Bl}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2)) \cong \mathbb{Z}^{r+1}$.

Hecho: Si $S \subseteq \mathbb{P}^3$ cúbica suave, $S \cong \text{Bl}_{p_1, \dots, p_6}(\mathbb{P}^2)$ y luego $\text{Pic}(S) \cong \mathbb{Z}^7$.

- ④ Sea $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con coord. $([x_0, x_1], [y_0, y_1])$ y $L_i := \text{pr}_i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ con $H^0(S, L_1) \cong \text{Vect}_k(x_0, x_1)$ y $H^0(S, L_2) \cong \text{Vect}_k(y_0, y_1)$.

Así, $L_i^{\otimes m} \neq 0$ en $\text{Pic}(S) \ \forall m \geq 1$ (pues $H^0(S, \mathcal{O}_S) \cong k$). Además, si $s_i \in H^0(S, L_i) \setminus \{0\}$ entonces $V(s_1) = \{p\} \times \mathbb{P}^1$ y $V(s_2) = \mathbb{P}^1 \times \{q\}$ son rectas que generan $\text{Cl}(S) \cong \text{Pic}(S)$. Así, hay un isomorfismo

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1), (a, b) \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$$

De manera análoga se calcula (**Ejercicio**) que $\text{Pic}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong \mathbb{Z}^2$.

- 5 Sea X variedad **proyectiva suave** e irreducible **racional**, i.e.,
 $\exists \emptyset \neq U \subseteq X$ abierto tal que $U \cong V$ para cierto $V \subseteq \mathbb{A}^n$ abierto.

Supongamos que $D := X \setminus U$ es una **hipersuperficie irreducible**.
Entonces, la sucesión exacta

$$\mathbb{Z}[\mathcal{O}_X(D)] \xrightarrow{\iota} \text{Pic}(X) \xrightarrow{\text{res}} \text{Pic}(U) \cong \{0\} \longrightarrow 0$$

implica que $\text{Pic}(X)$ está generado por $\mathcal{O}_X(D)$.

Dado que X es **proyectiva**, existe $L \in \text{Pic}(X)$ muy amplio y luego $L^{\otimes m} \neq 0$ en $\text{Pic}(X)$ para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Así,

$$\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{O}_X(D)] \cong \mathbb{Z}$$

grupo cíclico infinito generado por $\mathcal{O}_X(D)$. En particular, deducimos
que $\mathcal{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas **amplio**.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{PGL}_{n+1}(k)$$

Sea $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ un automorfismo de $\mathbb{P}^n$, i.e., un morfismo birregular.

Por un lado, f induce $f^* : \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)$, $L \longmapsto f^* L$ automorfismo del grupo $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$. Luego, $f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\pm 1)$ generador de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)$.

Por otro lado, f induce un isomorfismo de k -espacios vectoriales

$$\Gamma(f) : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cong k^{n+1} \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{P}^n, f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)).$$

Como $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = \{0\}$, necesariamente $f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.

Dado que f está determinado por $L = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ (ver Clase 16), tenemos que $f = \varphi_L$ es **lineal**. Así, obtenemos un morfismo sobreyectivo $\mathrm{GL}_{n+1}(k) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ con kernel dado por $\{\lambda I_{n+1}, \lambda \in k^*\}$, i.e.,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{PGL}_{n+1}(k).$$

TEOREMA DE ABEL-JACOBI

Sea C curva algebraica **proyectiva suave** irreducible. Un divisor de Weil es

$$D = \sum_{i=1}^r n_i p_i$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}$ y donde $p_i \in C$ es un *punto*. Definimos el **grado** de D como

$$\deg(D) := \sum_{i=1}^r n_i \in \mathbb{Z}.$$

Si C' es otra curva algebraica proyectiva suave irreducible y $f : C \rightarrow C'$ morfismo regular sobreyectivo (i.e., dominante), definimos el **grado de f**

$$\deg(f) := [k(C) : k(C')] \stackrel{\text{def}}{=} \dim_{k(C')} k(C) < +\infty$$

como el grado de la extensión de cuerpos $f^* : k(C') \hookrightarrow k(C)$.

Hecho (ver HARTSHORNE, CHAPTER II, PROPOSITION 6.9)

Si $f : C \rightarrow C'$ como antes, para todo $D \in \text{WDiv}(C') \cong \text{Div}(C')$ se tiene

$$\deg(f^* D) = \deg(f) \deg(D).$$

TEOREMA DE ABEL-JACOBI

Sea C curva proyectiva suave irreducible y $D = \operatorname{div}(f) \in \operatorname{PDiv}(C)$ divisor principal. Entonces, $\deg(D) = 0$. En particular, $\deg$ induce un morfismo

$$\deg : \operatorname{Pic}(C) \cong \operatorname{Div}(C)/\operatorname{PDiv}(C) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$L \cong \mathcal{O}_C(D) \mapsto \deg(L) := \deg(D)$$

con kernel $\operatorname{Pic}^0(C) := \ker(\deg)$, i.e., hay una sucesión exacta de grupos

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic}^0(C) \hookrightarrow \operatorname{Pic}(C) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Prueba: Sea $f : C \rightarrow k \cong \mathbb{A}^1 \cong U_0 \subseteq \mathbb{P}^1$ una función racional no-nula, y sea $F : C \rightarrow \mathbb{P}^1$, $x \mapsto [1, f(x)]$ la aplicación racional inducida. Como C suave y $\mathbb{P}^1$ proyectiva, F es un morfismo **regular**. Veamos que $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$:

Si f constante $\operatorname{div}(f) = 0$. Si f no-constante entonces F es sobreyectiva (pues es dominante y cerrada). Si probamos que $\operatorname{div}(f) = F^*(0 - \infty)$ con $0 := [1, 0]$ y $\infty := [0, 1]$, el **Hecho** anterior permite concluir que

$$\deg(\operatorname{div}(f)) = \deg(F) \cdot \deg(0 - \infty) = \deg(F) \cdot 0 = 0.$$

TEOREMA DE ABEL-JACOBI

Basta chequear que $\text{div}(f) = F^*(0 - \infty)$ con $0 := [1, 0]$ y $\infty := [0, 1]$:

Sean $\mathbb{A}^1 \cong U_i = \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^1$ con $i \in \{0, 1\}$. El divisor de Cartier $0 \stackrel{\text{def}}{=} [1, 0]$ en $\mathbb{P}^1$ está definido por la familia admisible $\{(\frac{x_1}{x_0}, U_0), (1, U_1)\}$, y por ende F^*0 está definido por $\{(f, F^{-1}(U_0)), (1, F^{-1}(U_1))\}$.

Similar: $F^*\infty$ está dado por $\{(1, F^{-1}(U_0)), (\frac{1}{f}, F^{-1}(U_1))\}$. Así, $F^*(0 - \infty)$ está dado por $\{(f, F^{-1}(U_0)), (f, F^{-1}(U_1))\}$, i.e., $F^*(0 - \infty) = \text{div}(f)$. $\square$

Cultura general

El grupo $\text{Pic}^0(C) \cong \text{Jac}(C)^\vee$ es el dual de la **variedad jacobiana** $\text{Jac}(C)$ de la curva C , una variedad abeliana canónicamente asociada a C .

TEOREMA DE ABEL-JACOBI

Teorema de Abel-Jacobi

Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible. Entonces,

- 1 $\deg : \text{Pic}(C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ es un isomorfismo si y sólo si $C \cong \mathbb{P}^1$.
- 2 Si $C \not\cong \mathbb{P}^1$ y $p_0 \in C$ fijo, la **aplicación de Abel-Jacobi**

$\varphi : C \hookrightarrow \text{Pic}^0(C)$, $p \mapsto \mathcal{O}_C(p - p_0)$ es inyectiva.

Prueba: Si $\deg$ es inyectivo y $p, q \in C$ distintos, entonces $\deg(\mathcal{O}_C(p - q)) = 0$ implica que $p \sim q$, i.e., $\exists f : C \rightarrow k$ con $\text{div}(f) = p - q$. Tal como antes, $F : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ verifica $F^*0 = p$ y $F^*\infty = q$. Así, el **Hecho** anterior implica

$$\underbrace{\deg(F^*0)}_{\deg(p)=1} = \deg(F) \underbrace{\deg(0)}_{=1}, \text{ i.e., } \deg(F) = 1,$$

i.e., $k(C) \cong k(\mathbb{P}^1)$, i.e., $C \sim_{\text{bir}} \mathbb{P}^1$. Así, $C \cong \mathbb{P}^1$ (curvas proyectivas suaves).

Para (2), notar que si $\mathcal{O}_C(p - p_0) \cong \mathcal{O}_C(q - p_0)$ entonces $\mathcal{O}_C(p - q) \cong \mathcal{O}_C$, i.e., $p \sim q$ y tendríamos que $C \cong \mathbb{P}^1$ por la demostración de (1). $\square$

POSITIVIDAD EN CURVAS ALGEBRAICAS

Sea C curva proyectiva suave irreducible y $L \cong \mathcal{O}_C(D) \in \text{Pic}(C)$. Entonces,

$$|D| \stackrel{\text{def}}{=} \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } D \sim E\} \cong \mathbb{P}H^0(C, L).$$

Luego, si $\varphi_L : C \rightarrow \mathbb{P}(H^0(C, L)^\vee) \stackrel{\text{def}}{=} |D|^\vee$ entonces si L es:

- ① **globalmente generado**, entonces $\dim_k H^0(C, L) \geq 1$. Luego, existe $E \geq 0$ tal que $E \sim D$, y por ende $\deg(L) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(D) = \deg(E) \geq 0$.
- ② **muy amplio**, entonces $\dim_k H^0(C, L) \geq 2$. Luego, existe $E \geq 0$ **no-nulo** tal que $E \sim D$, y por ende $\deg(L) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(D) = \deg(E) > 0$.
- ③ **amplio**, entonces $\deg(L) > 0$. En efecto, dado que

$$\deg(L^{\otimes m}) = m \deg(L) \text{ para todo } m \in \mathbb{Z},$$

basta considerar $m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $L^{\otimes m_0}$ sea muy amplio.

Más adelante probaremos que todo $L \in \text{Pic}(C)$ con $\deg(L) > 0$ es amplio.

INTERSECCIÓN DE UNA CURVA Y UN DIVISOR

Sea X variedad **proyectiva** irreducible. Dado $D \in \text{Div}(X)$ un divisor de Cartier y $C \subseteq X$ curva **suave** irreducible, su **número de intersección** es

$$D \cdot C := \deg(\mathcal{O}_X(D)|_C) \in \mathbb{Z}.$$

Si C curva irreducible no necesariamente suave y $\nu : C^\nu \rightarrow C$ su normalización, se define² $D \cdot C := \deg(\nu^*(\mathcal{O}_X(D)|_C)) \in \mathbb{Z}$. En particular,

Si $D_1 \sim D_2$ entonces $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$.

Sea X variedad proyectiva irreducible. Decimos que $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ son **numéricamente equivalentes** si

$$D_1 \cdot C = D_2 \cdot C \text{ para toda curva irreducible } C \subseteq X,$$

y escribimos $D_1 \equiv D_2$ (o bien $D_1 \sim_{\text{num}} D_2$). El grupo abeliano cociente $\text{NS}(X) := \text{Div}(X)/\equiv$ es el **grupo de Néron-Severi** de X .

²Bien definido pues C^ν es proyectiva en este caso, algo que probaremos más adelante.

EL GRUPO DE NÉRON-SEVERI

A diferencia de $\text{Pic}(X)$, el grupo de Néron-Severi es mucho más tratable.

Teorema (Néron 1952, Severi 1934)

Sea X variedad algebraica proyectiva irreducible. Entonces, el grupo abeliano $\text{NS}(X)$ es **finitamente generado**. En particular,

$$\text{NS}(X) \cong \mathbb{Z}^r \oplus T,$$

donde T es el grupo *finito* de torsión y donde $r \stackrel{\text{def}}{=} \text{rg}(\text{NS}(X)) =: \rho(X)$ es el **número de Picard** de X .

Por ejemplo, tenemos que:

- ❶ Si C curva proyectiva suave irreducible, $\text{NS}(C) \cong \mathbb{Z}$ y luego $\rho(C) = 1$.
- ❷ $\rho(\mathbb{P}^n) = 1$.
- ❸ $\rho(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = 2$.
- ❹ $\rho(\text{Bl}_Z(X)) = \rho(X) + 1$.

Si X variedad proyectiva irreducible y $L \cong \mathcal{O}_X(D) \in \text{Pic}(X)$ es **amplio**, entonces $L|_C$ es amplio para toda curva irreducible $C \subseteq X$.

Usando métodos de cohomología, probaremos que como $\nu : C^\nu \rightarrow C$ es **finito** entonces ν^*L es amplio en C^ν . Luego,

Si $\mathcal{O}_X(D)$ es **amplio**, $D \cdot C > 0$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$.

Lo anterior motiva la siguiente definición en geometría birracional.

Cultura general

Sea X variedad proyectiva irreducible. Decimos que $L \cong \mathcal{O}_X(D) \in \text{Pic}(X)$ es **nef** si^a

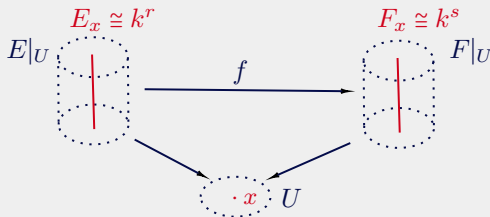
$$D \cdot C \geq 0 \text{ para toda curva irreducible } C \subseteq X.$$

^aAquí, **nef** es la abreviación de *numerically eventually free*.

§3.5 SUB-FIBRADOS Y FIBRADOS COCIENTES

KERNEL E IMAGEN EN $\mathbf{Vect}(X)$

Recuerdo: Sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de $\text{rg}(E) = r$ y $\text{rg}(F) = s$. Un **morfismo de fibrados vectoriales** es un morfismo regular $f : E \rightarrow F$ tal que $q \circ f = p$, i.e.,



y $f_x : E_x \cong k^r \rightarrow F_x \cong k^s$ es k -lineal $\forall x \in X$. En este caso, definimos

$$\ker(f) := \bigcup_{x \in X} \ker(f_x) \subseteq E, \quad \text{Im}(f) := \bigcup_{x \in X} \text{Im}(f_x) \subseteq F$$

Estas subvariedades pueden **no** ser fibrados vectoriales (**Ejercicio**).
En términos categóricos, $\mathbf{Vect}(X)$ no es una categoría abeliana.

Hecho (Ejercicio de Lectura)

Sea $f : E \rightarrow F$ morfismo de fibrados vectoriales en X tal que

$\operatorname{rg}(f) := \operatorname{rg}(f_x)$ es constante para todo $x \in X$.

Entonces, $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ son fibrados vectoriales en X .

Caso particular importante: Sea $f : E \rightarrow F$ morfismo de fibrados tal que

- 1 f es **inyectivo**: En tal caso, $\operatorname{Im}(f) \cong E$ es un fibrado vectorial, y decimos que E es un **sub-fibrado** de F , y escribimos

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \text{ o simplemente } E \subseteq F.$$

- 2 f es **sobreyectivo**: En tal caso, $\ker(f)$ sub-fibrado vectorial de E , y escribimos $E \xrightarrow{f} F \longrightarrow 0$.

SUB-FIBRADOS Y FIBRADOS COCIENTES

Si $\iota : E \hookrightarrow F$ sub-fibrado y si trivializamos E y F simultaneamente obtenemos matrices de transición de F dadas por matrices por bloques

$$g_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} a_{ij} & b_{ij} \\ \hline 0 & c_{ij} \end{array} \right)$$

con a_{ij} matriz de transición de E . La condición $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ se reduce a:

- ❶ $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$, la condición de cociclo de E .
- ❷ $a_{ij}b_{jk} + b_{ij}c_{jk} = b_{ik}$, una condición mixta.
- ❸ $c_{ij}c_{jk} = c_{ik}$, una **nueva condición de cociclo** que define un fibrado vectorial Q de rango $\text{rg}(Q) = \text{rg}(F) - \text{rg}(E)$.

El fibrado vectorial Q es el **fibrado cociente** $Q := F/E$. Más aún, hay una proyección natural $\pi : F \twoheadrightarrow Q$ sobreyectiva que cumple $\ker(\pi) \cong E$.

Así, hay una **sucesión exacta** (S) de fibrados vectoriales en X

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0. \quad (S)$$

FIBRADOS DETERMINANTES Y PULLBACK

La escritura de g_{ij} implica que $\det(g_{ij}) = \det(a_{ij}) \det(c_{ij})$ y luego

$$\det(F) \cong \det(E) \otimes \det(Q) \text{ en } \text{Pic}(X).$$

De manera similar, si $L \in \text{Pic}(X)$ tiene **funciones** de transición h_{ij} entonces (en una trivialización común) las matrices de transición de $F \otimes L$ son

$$g_{ij} \otimes h_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} a_{ij}h_{ij} & b_{ij}h_{ij} \\ \hline 0 & c_{ij}h_{ij} \end{array} \right)$$

y luego obtenemos una sucesión exacta $(S) \otimes L$ dada por

$$0 \longrightarrow E \otimes L \hookrightarrow F \otimes L \twoheadrightarrow Q \otimes L \longrightarrow 0.$$

Ejercicio útil: Dada $0 \longrightarrow E \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$ (S). Probar que

- ① La **sucesión dual** ($S^\vee$) siguiente es exacta:

$$0 \longrightarrow Q^\vee \xrightarrow{t_\pi} F^\vee \xrightarrow{t_\iota} E^\vee \longrightarrow 0$$

- ② Para todo $\varphi: Y \rightarrow X$ regular, el **pullback** $\varphi^*(S)$ es exacta en Y :

$$0 \longrightarrow \varphi^*E \longrightarrow \varphi^*F \twoheadrightarrow \varphi^*Q \longrightarrow 0$$

FIBRADO COCIENTE TAUTOLÓGICO EN $\text{Gr}(r, V)$

Sea $V \cong k^n$ un k -e.v. y $1 \leq r \leq n - 1$. En $G = \text{Gr}(r, V)$ se tiene el **subfibrado tautológico** $S \subseteq V_G$, donde $V_G \stackrel{\text{def}}{=} G \times V$ es el fibrado trivial y donde

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{([\Lambda], v) \in \text{Gr}(r, V) \times V \text{ tal que } v \in \Lambda\} \xrightarrow{p := \text{pr}_1} \text{Gr}(r, V)$$

con $\text{rg}(S) = r$. Lo anterior permite definir el **fibrado cociente tautológico** $Q := V_G/S$, de $\text{rg}(Q) = n - r$ y con $Q_{[\Lambda]} \cong V/\Lambda$. Hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow V_G \twoheadrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

FIBRADOS GLOBALMENTE GENERADOS

Construcción: Sea $E \rightarrow X$ fibrado de $\operatorname{rg}(E) = r$ y sea $V \subseteq H^0(X, E)$ tal que $\dim_k(V) = n > r$. Entonces, podemos definir una aplicación racional

$$\varphi_V : X \dashrightarrow \operatorname{Gr}(n - r, V), \quad x \longmapsto K_x := \{s \in V \text{ tal que } s(x) = 0_{E_x}\}$$

donde $0_{E_x} \in E_x \cong k^r$ impone “típicamente” r condiciones independientes.

Más formalmente, φ_V es regular en $x \in X$ si y sólo si la aplicación

$$\operatorname{ev}_x : V \longrightarrow E_x, \quad s \longmapsto s(x)$$

verifica $\dim_k(\ker(\operatorname{ev}_x)) = n - r$, i.e., $\operatorname{rg}(\operatorname{ev}_x) = r$, i.e., cuando

$$0 \longrightarrow K_x \stackrel{\text{def}}{=} \ker(\operatorname{ev}_x) \longrightarrow V \xrightarrow{\operatorname{ev}_x} E_x \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Decimos que V es **globalmente generado** si

$$\operatorname{ev}_x : V \twoheadrightarrow E_x \text{ sobreyectiva } \forall x \in X, \text{ i.e., } \varphi_V : X \rightarrow \operatorname{Gr}(n - r, V) \text{ regular.}$$

Decimos que E es **globalmente generado** si $\dim_k H^0(X, E)$ es finita y $H^0(X, E)$ es globalmente generado.

RELACIÓN CON SUCESIONES EXACTAS

Sea $V \subseteq H^0(X, E)$ globalmente generado con $\varphi_V : X \longrightarrow \mathrm{Gr}(n-r, V)$. Consideremos la sucesión exacta tautológica en $G = \mathrm{Gr}(n-r, V)$ dada por

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow V_G \longrightarrow Q \longrightarrow 0, \text{ donde } \mathrm{rg}(Q) = r.$$

El pullback de esta sucesión por φ_V nos da una sucesión exacta en X

$$0 \longrightarrow \varphi_V^* S \stackrel{\mathrm{def}}{=} K = \ker(\mathrm{ev}) \longrightarrow \varphi_V^* V_G \stackrel{\mathrm{def}}{=} V_X \longrightarrow \varphi_V^* Q \longrightarrow 0,$$

y en particular tenemos que $\varphi_V^* Q \cong E$.

Si $E = L \in \mathrm{Pic}(X)$ y $V \subseteq H^0(X, L)$ sistema lineal globalmente generado, lo anterior da una demostración alternativa del hecho que $\varphi_V^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1) \cong L$.