

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 16

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

28 DE SEPTIEMBRE DE 2026

§3.3 SISTEMAS LINEALES Y AMPLITUD

- Un fibrado en rectas $p : L \rightarrow X$ es una fibración, localmente trivial en un cubrimiento $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, de k -e.v. $p^{-1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} L_x$ de dimensión 1.
- L está determinado por **funciones de transición** $\{g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow k^*\}$.
- El producto tensorial permite definir el **grupo de Picard** $\text{Pic}(X)$.
- Una **sección** de L es un morfismo regular $s : X \rightarrow L$ tal que $s(x) \in L_x$ para todo $x \in X$, i.e., $\{s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)\}$ tales que $s_i = g_{ij}s_j$ en $U_i \cap U_j$.
- El conjunto de secciones $H^0(X, L)$ es un k -espacio vectorial.
- **Ejemplo importante:** El fibrado tautológico $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ de $\mathbb{P}^n$ cumple $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)_{[\ell]} \cong \ell$ y $g_{ij}(x) = x_i/x_j$.

APLICACIÓN ASOCIADA A $L \in \text{Pic}(X)$

Sean $s_0, \dots, s_n \in H^0(X, L) \setminus \{0\}$ con s_j definida por $s_{j,i} \in \mathcal{O}_X(U_i)$ en U_i . Así, para cada $x \in U_i$ definimos la aplicación racional

$$\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n, x \longmapsto [s_{0,i}(x), \dots, s_{n,i}(x)]$$

φ_L es **independiente** del abierto pues al pasar del abierto U_i a U_j cada coordenada de $\varphi_L(x)$ se multiplica por el mismo factor no-nulo $g_{ji}(x)$.

Luego, escribimos simplemente

$$\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n, x \longmapsto [s_0(x), \dots, s_n(x)],$$

bien definida fuera del cerrado $Z = \{x \in X \text{ tal que } s_i(x) = 0 \ \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}\}$ X .

Caso particular importante: Si las secciones $s_0, \dots, s_n$ **no** tienen ceros comunes (i.e., $Z = \emptyset$), entonces

$\varphi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ es un **morfismo regular**.

$\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$ Y MORFISMOS A $\mathbb{P}^n$

En el caso en que φ_L es **regular**, se tiene $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$. En efecto:

Si $U_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$, $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ se trivializa en los abiertos

$$X_i := \varphi_L^{-1}(U_i) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } s_i(x) \neq 0\},$$

Dado que $\varphi_L(x) = \left[\frac{s_0(x)}{s_j(x)}, \dots, \frac{s_n(x)}{s_j(x)} \right]$ para todo $x \in X_j$, las funciones de transición h_{ij} de $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ para pasar de X_j a X_i están dadas por

$$h_{ij}(x) = \frac{s_j(x)}{s_i(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s_j(x)}{g_{ij}(x)s_j(x)} = \frac{1}{g_{ij}(x)} \stackrel{\text{def}}{=} g_{ji}(x), \text{ i.e., } \varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \cong L^\vee.$$

Recíprocamente: Dado $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$, $x \mapsto [f_0(x), \dots, f_n(x)]$ regular, consideramos $L := f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, junto con la aplicación k -lineal

$$\Gamma(f) : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \rightarrow H^0(X, L), \quad x_i \mapsto \Gamma(f)(x_i) =: s_i$$

Luego, $f = \varphi_L$ ya que $s_j(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x_j \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_j(x)$ para todo $j \in \{0, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ \text{morfismo regular} \end{array} \right\} &\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L \in \text{Pic}(X) \text{ junto con secciones} \\ s_0, \dots, s_n \in H^0(X, L) \text{ sin ceros comunes} \end{array} \right\} \\
f &\longmapsto L := f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \text{ y } s_i := \Gamma(f)(x_i) \\
f := \varphi_L &\longleftarrow (L, (s_0, \dots, s_n))
\end{aligned}$$

SISTEMAS LINEALES

Sea $L \in \text{Pic}(X)$. Un **sistema lineal** M en X es un sub-espacio vectorial $M \subseteq H^0(X, L)$ de *dimensión finita*. En particular, si $\dim_k H^0(X, L) < +\infty$ decimos que el sistema lineal $H^0(X, L)$ es un **sistema lineal completo**.

Dado $M \subseteq H^0(X, L)$ sistema lineal, escribimos

$$|M| := \mathbb{P}(M^\vee) \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{hiperplanos en } M\}.$$

el espacio proyectivo **dual** de M . Así, se tiene análogamente

$\varphi_M : X \rightarrow |M| \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(M^\vee)$, $x \mapsto M_x := \{s \in M \text{ tal que } s(x) = 0_{L_x}\}$
y φ_M definida en $x \in X$ (i.e., $M_x \subseteq M$ hiperplano) $\Leftrightarrow \exists s \in M$ con $s(x) \neq 0$.

Si $s_0, \dots, s_n$ base de M y $s = \sum_{i=0}^n \lambda_i s_i$, entonces $M_x \in |M|$ está dado por

$$\lambda_0 s_0(x) + \dots + \lambda_n s_n(x) = 0$$

y corresponde al punto $[s_0(x), \dots, s_n(x)] \in |M| \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(M^\vee) \cong \mathbb{P}^n$, i.e.,

$\varphi_M : X \rightarrow |M| \cong \mathbb{P}^n$, $x \mapsto [s_0(x), \dots, s_n(x)]$ en coordenadas.

Sea $M \subseteq H^0(X, L)$ sistema lineal. El **lugar de base** de M es

$$\text{Bs}(M) := \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0 \text{ para todo } s \in M\}.$$

Decimos que M es **libre de puntos de base** (o **globalmente generado**¹) si $\text{Bs}(M) = \emptyset$, i.e., $\varphi_M : X \longrightarrow |M| \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(M^\vee)$ es un **morfismo regular**.

Equivalentemente, dado que $\dim_k L_x = 1$, el morfismo de evaluación

$$\text{ev} : X \times M \rightarrow L, (x, s) \mapsto s(x) \text{ es } \mathbf{sobreyectivo}.$$

En particular, tenemos una biyección

$$\left\{ \begin{array}{l} f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ \text{morfismo regular} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L \in \text{Pic}(X) \text{ junto con } M \subseteq H^0(X, L) \text{ sistema} \\ \text{lineal de } \dim_k(M) = n + 1 \text{ sin puntos de base} \end{array} \right\}$$

¹En inglés, *base point free* o bien *globally generated*.

EJEMPLOS

- 1 Si $\dim_k(M) = 2$ (i.e., $|M| \cong \mathbb{P}^1$) decimos que $f : X \rightarrow |M| \cong \mathbb{P}^1$ es un **pincel** de hipersuperficies en X .
- 2 Las inclusiones $M \subseteq N \subseteq H^0(X, L)$ inducen aplicaciones racionales

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_N} & \mathbb{P}(N^\vee) \\ & \searrow \varphi_M & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{P}(M^\vee) \end{array}$$

donde π es la proyección lineal inducida por $N^\vee \twoheadrightarrow M^\vee$. Si $s_0, \dots, s_n$ base de N con $s_0, \dots, s_m$ base de M , $\pi([s_0, \dots, s_n]) = [s_0, \dots, s_m]$.

- 3 Sea $X = \mathbb{P}^n$ y $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ con $d \geq 1$. Como $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cong k[x_0, \dots, x_n]_d$, $\varphi_L \stackrel{\text{def}}{=} \nu_d : \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ es el incrustamiento de Veronese. Así, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ es **globalmente generado**.
- 4 En $\mathbb{P}^2$, si $M := \text{Vect}_k\langle yz, xz, xy \rangle \subseteq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ entonces $\varphi_M : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $[x, y, z] \mapsto [yz, xz, xy]$ es la involución de Cremona.

Si $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ incrustamiento cerrado, denotamos $\mathcal{O}_X(1) := f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$, abuso de notación pues depende de f .

NAKAYAMA E INCRUSTAMIENTOS CERRADOS

Hecho (Lema de Nakayama)

Sea $(A, \mathfrak{m})$ anillo local con $A/\mathfrak{m} \cong k$ y M un A -mód. finitamente generado. Si $u_1, \dots, u_m \in M$ son tales que $[u_1], \dots, [u_m]$ generan el k -e.v. $M/\mathfrak{m}M$, entonces $u_1, \dots, u_m$ generan M como A -módulo.

Así, si A noetheriano y $M = \mathfrak{m}$, generadores de $\mathfrak{m}$ se identifican en $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Teorema

Sea $f: X \rightarrow Y$ morfismo **finito**. Supongamos que:

- 1 f **separa puntos**, i.e., f es inyectivo.
- 2 f **separa tangentes**, i.e., $d_x f: T_x X \hookrightarrow T_{f(x)} Y$ inyectivo $\forall x \in X$.

Entonces, f es un incrustamiento cerrado (i.e., $X \cong f(X) \hookrightarrow Y$ cerrado).

Ejercicio (cf. Apunte): basta ver que $f^*: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ es isomorfismo. Por (2), $f^*: \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ es sobreyectiva y **Nakayama** da $\mathfrak{m}_x = \langle f^*(\mathfrak{m}_y) \rangle$; como f finito, **Nakayama** (otra vez) da que 1 genera $\mathcal{O}_{X,x}$ sobre $\mathcal{O}_{Y,y}$, i.e., f^* es isomorfismo en los tallos. $\square$

INCRUSTAMIENTOS CERRADOS

Usando técnicas de **cohomología**, más adelante probaremos:

Teorema de Grauert-Grothendieck

Si $f: X \rightarrow Y$ regular cuyas fibras $f^{-1}(y)$ son conjuntos finitos (e.g. f inyectivo) y X variedad proyectiva, entonces f es un **morfismo finito**.

Sea X variedad proyectiva y $M \subseteq H^0(X, L)$ sistema lineal. Entonces, $\varphi_M: X \hookrightarrow |M| \cong \mathbb{P}(M^\vee)$ es un incrustamiento cerrado si y sólo si

- 1 M **separa puntos**, i.e., $\forall x \neq y$ en X existe $s \in M$ tal que $s(x) = 0$ y $s(y) \neq 0$. En particular, M es libre de puntos de base.
- 2 M **separa tangentes**, i.e., $\forall x \in X$ y todo $v \in T_x X$ existe $s \in M$ tal que $s(x) = 0$ y $(d_x s)(v) \neq 0$.

Ejercicio (cf. Apunte): (1) da φ_M regular inyectivo y luego finito (**Grauert-Grothendieck**), por lo que basta ver que (2) equivale a $d_x \varphi_M$ inyectiva. Si $s_0, \dots, s_n$ es base de M con $s_0(x_0) \neq 0$ y $s_i(x_0) = 0$ para $i > 0$, en X_{s_0} se tiene $\varphi_M(x) = \left(\frac{s_1(x)}{s_0(x)}, \dots, \frac{s_n(x)}{s_0(x)} \right)$ y **Leibniz** da $(d_{x_0} \varphi_M)(v) = \left(\frac{(d_{x_0} s_1)(v)}{s_0(x_0)}, \dots, \frac{(d_{x_0} s_n)(v)}{s_0(x_0)} \right)$, donde cada $(d_{x_0} s_i)(v)$ está bien definido pues $s_{i,\alpha} = g_{\alpha\beta} s_{i,\beta}$ y $s_i(x_0) = 0$. □

TEOREMA DE BERTINI

Teorema de Bertini general ($\text{car}(k) = 0$)

Sea X suave e irreducible, y $M \subseteq H^0(X, L)$ sistema lineal **libre de puntos de base**. Entonces, para $s \in M$ sección **general** la variedad

$$V(s) := \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0\} \subseteq X \text{ es suave.}$$

Prueba: Sea $I := \{(s, x) \in M \times X \text{ tal que } s(x) = 0\}$ la variedad de incidencia. Como M es libre de puntos de base, $\text{pr}_2^{-1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} M_x \in |M| \cong \mathbb{P}^n$ es un hiperplano $\cong \mathbb{P}^{n-1} \forall x \in X$.

Si L es localmente trivial en $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, entonces $\text{pr}_2^{-1}(U_\lambda) \cong U_\lambda \times \mathbb{P}^{n-1} \forall \lambda \in \Lambda$ (**Ejercicio**), i.e., I es suave. Luego, suavidad genérica aplicada a $\text{pr}_1 : I \rightarrow M$ da que $\text{pr}_1^{-1}(s) \stackrel{\text{def}}{=} V(s)$ es suave si $s \in M \cong \mathbb{A}^{n+1}$ general. $\square$

Considerando $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ y $L := f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, se deduce el Teorema de Bertini clásico (ver Clase 13) a partir de lo anterior (**Ejercicio**).

POSITIVIDAD EN GEOMETRÍA ALGEBRAICA

Las siguientes nociones son fundamentales en Geometría Algebraica.

Sea X variedad algebraica y $L \in \text{Pic}(X)$ tal que $\dim_k H^0(X, L) < +\infty$, con

$$\varphi_L : X \rightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L)^\vee)$$

la aplicación racional asociada. Decimos que L es:

- ❶ **globalmente generado** si φ_L es un morfismo regular, i.e.,
 $\text{Bs}(L) := \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0 \text{ para todo } s \in H^0(X, L)\}$ es vacío.
- ❷ **semi-amplio** si $L^{\otimes m}$ es globalmente generado para cierto $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.
- ❸ **muy amplio** si $\varphi_L : X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L)^\vee)$ es un incrustamiento cerrado, i.e., si L separa puntos y tangentes.
- ❹ **amplio** si $L^{\otimes m}$ es muy amplio para cierto $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Así, X es **proyectiva** $\Leftrightarrow$ Existe $L \in \text{Pic}(X)$ fibrado en rectas **amplio**.

POSITIVIDAD EN GEOMETRÍA ALGEBRAICA

La siguiente definición fue introducida por Shigeru Iitaka en 1970.

Sea X variedad algebraica y $L \in \text{Pic}(X)$ tal que^a $\dim_k H^0(X, L^{\otimes m}) < +\infty$ para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Definimos la **dimensión de Iitaka** de L mediante

$$\kappa(L) = \begin{cases} \max_{m \in \mathbb{N}^{\geq 1}} \dim \left(\overline{\varphi_{L^{\otimes m}}(X)} \right) & \text{si } \exists m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ con } H^0(X, L^{\otimes m_0}) \neq \{0\} \\ -\infty & \text{si } H^0(X, L^{\otimes m}) = \{0\} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \end{cases}$$

Luego, $\kappa(L) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim(X)\}$.

^aMás adelante veremos que esto es automático si X es proyectiva.

Así, $\kappa(L)$ mide la máxima dimensión que puede tener la imagen $\varphi_{L^{\otimes m}}(X)$.

Decimos que el fibrado en rectas L es **big** si tiene dimensión de Iitaka maximal, i.e., si $\kappa(L) = \dim(X)$.

POSITIVIDAD EN GEOMETRÍA ALGEBRAICA

Sea X variedad algebraica y $L \in \text{Pic}(X)$ tal que $\dim_k H^0(X, L^{\otimes m}) < +\infty$ para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Entonces se tienen las implicancias (**Ejercicio**):

$$\begin{array}{ccccc} L \text{ globalmente generado} & \implies & L \text{ semi-amplio} & \implies & \kappa(L) \geq 0 \\ \uparrow\!\!\uparrow & & \uparrow\!\!\uparrow & & \uparrow\!\!\uparrow \\ L \text{ muy amplio} & \implies\!\!\implies & L \text{ amplio} & \implies\!\!\implies & L \text{ big} \end{array}$$

Hecho (Zariski, 1962)

Sea X una variedad algebraica proyectiva **normal**, y sea $L \in \text{Pic}(X)$ un fibrado en rectas tal que el lugar de base $\text{Bs}(L)$ es un **conjunto finito**. Entonces, L es semi-amplio.

§3.4 DIVISORES DE WEIL Y DIVISORES DE CARTIER

DIVISORES DE WEIL

Recordemos que si X es una variedad irreducible **normal** entonces

$$\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing}(X) \geq 2 \quad (\dagger)$$

Si $Y \subseteq X$ **hipersuperficie irreducible** entonces $X_{\text{reg}} \cap Y \neq \emptyset$, i.e., $\exists y \in Y$ punto suave en X . Así, $\exists y \in U \subseteq X$ abierto afín y $u \in \mathcal{O}(U) \setminus \{0\}$ irreducible con

$$\mathcal{I}(Y \cap U) = \langle u \rangle, \text{ i.e., } u \text{ es una ecuación local de } Y.$$

Como $k(X) \cong k(U) \cong \operatorname{Fr}(\mathcal{O}(U))$, **toda** $f : X \rightarrow k$ racional no-nula cumple

$$f = \frac{g}{h} = \frac{u^a g'}{u^b h'} = u^m \frac{g'}{h'}, \text{ donde } m := a - b \in \mathbb{Z} \text{ y donde } g', h' \notin \mathcal{I}(Y \cap U).$$

Más aún, $m \geq 0$ si $f \in \mathcal{O}_{X,y}$ es regular en $y \in X$.

Definimos la **multiplicidad** de $f \in k(X) \setminus \{0\}$ a lo largo de Y como dicho $\nu_Y(f) := m \in \mathbb{Z}$. Además, decimos que:

- ❶ f tiene un **cero** a lo largo de Y si $\nu_Y(f) > 0$.
- ❷ f tiene un **polo** a lo largo de Y si $\nu_Y(f) < 0$.

Definición (Divisor de Weil)

Sea X variedad irreducible **normal**. Un **divisor de Weil** es una expresión

$$D = \sum_{\text{finita}} n_Y \cdot Y, \text{ donde } n_Y \in \mathbb{Z} \text{ y donde } Y \subseteq X \text{ hipersuperficie irreducible,}$$

i.e., es una **suma formal** obtenida como combinación lineal entera de hipersuperficies irreducibles de X .

Denotamos por $\text{WDiv}(X)$ al grupo abeliano de divisores de Weil en X .

Si $f \in k(X)^*$ hay **finitas** hipersuperficies irreducibles $Y \subseteq X$ con $\nu_Y(f) \neq 0$.

En efecto, si $U = \text{Dom}(f) \subseteq X$ y $Z := X \setminus U$, entonces para toda $Y \subseteq X$:

- ① Si $Y \subseteq Z$, Y es una de las **finitas** componentes irreducibles de Z .
- ② Si $Y \cap U \neq \emptyset$, $\nu_Y(f) \geq 0$ por definición. Además, $\nu_Y(f) > 0$ implica $Y \subseteq V(f)$, y este último tiene **finitas** componentes irreducibles. $\square$

DIVISORES DE WEIL

Ejemplo fundamental: Sea X variedad irreducible **normal** y $f \in k(X)^*$. Definimos el **divisor de Weil asociado a f** mediante

$$\operatorname{div}(f) := \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{hip. irred.}}} \nu_Y(f) \cdot Y \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(f)_+ - \operatorname{div}(f)_-,$$

donde $\operatorname{div}(f)_+$ (resp. $\operatorname{div}(f)_-$) es el divisor de ceros (resp. polos) de f .

Notar que si $f, g \in k(X)^*$, entonces $\operatorname{div}(fg) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$.

Luego, obtenemos un morfismo de grupos abelianos

$$\operatorname{div} : k(X)^* \longrightarrow \operatorname{WDiv}(X), \quad f \longmapsto \operatorname{div}(f)$$

cuya imagen

$$\operatorname{PWDiv}(X) := \{D \in \operatorname{WDiv}(X), \exists f \in k(X)^* \text{ tal que } D = \operatorname{div}(f)\}$$

es el sub-grupo (normal) de **divisores de Weil principales** de X .