

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 15

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

28 DE SEPTIEMBRE DE 2026

§3.1 FIBRADOS VECTORIALES Y GRUPO DE PICARD

LOS FIBRADOS VECTORIALES Y DIVISORES CONECTAN VARIEDADES
ABSTRACTAS Y VARIEDADES CLÁSICAS (CEROS DE POLINOMIOS).

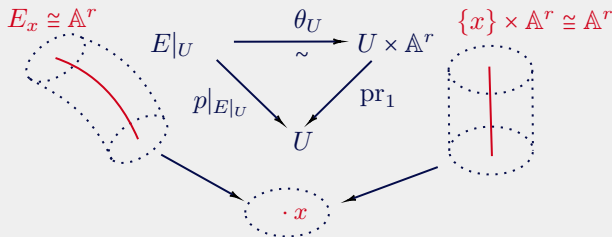
FIBRADOS VECTORIALES

Sea X variedad algebraica. Un **fibrado vectorial de rango** $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ en X es una variedad E con $p: E \rightarrow X$ regular sobreyectivo tal que:

- ❶ Para todo $x \in X$, $p^{-1}(x) := E_x \cong k^r$ es un k -e.v. de $\dim_k(E_x) = r$.
- ❷ Para todo $x \in X$, existe $U \subseteq X$ abierto afín y un isomorfismo

$$\theta_U : p^{-1}(U) \cong E|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{A}^r \quad (\text{trivialización de } E \text{ sobre } U)$$

tal que el diagrama siguiente conmuta



y $k^r \xrightarrow{\sim} E_x$, $v \mapsto \theta_U^{-1}(x, v)$ es un isomorfismo lineal para todo $x \in U$.

Caso particular importante

Un **fibrado en rectas**^a en X es un fibrado vectorial $L \xrightarrow{p} X$ de rango 1.

^aEn inglés, **line bundle**.

- ❶ Sea V un k -e.v. de $\dim_k(V) = r$. El fibrado vectorial

$$V_X := X \times V \cong X \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{\text{pr}_1} X$$

es llamado el **fibrado trivial** de rango r en X .

- ❷ Sea V un k -e.v. de $\dim_k(V) = n + 1$, sea $X = \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ su proyectivización. Dentro de $V_X \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V) \times V$, consideramos

$$L := \{([\ell], v) \in \mathbb{P}(V) \times V, v \in \ell\} \xrightarrow{p := \text{pr}_1} \mathbb{P}(V), ([\ell], v) \mapsto [\ell],$$

donde $[\ell] \in \mathbb{P}(V)$ es el *punto* del espacio proyectivo correspondiente a la recta vectorial $\ell \subseteq V$. En particular, $p^{-1}([\ell]) \stackrel{\text{def}}{=} \ell \cong \mathbb{A}^1$ es una recta.

EJEMPLOS (FIBRADOS TAUTOLÓGICOS)

Para trivializar $L \xrightarrow{p} \mathbb{P}(V)$ consideremos coord. $[x_0, \dots, x_n]$ en $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}(V)$ y t una coord. en $\ell \cong \mathbb{A}^1$. Así, en $U_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i \neq 0\}$ tenemos la trivialización

$$U_i \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow[\sim]{\theta_i^{-1}} p^{-1}(U_i)$$

$$\left(\underbrace{\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right]}_{\text{genera una recta } \ell}, t \right) \mapsto \left([x_0, \dots, x_n], \underbrace{\left(\frac{tx_0}{x_i}, \dots, t, \dots, \frac{tx_n}{x_i} \right)}_{\text{vector en } \ell} \right)$$

El fibrado anterior será denotado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ o por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, y es llamado el **fibrado en rectas tautológico** de $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$. En particular,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \twoheadrightarrow \mathbb{P}(V) \text{ cumple } \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{[\ell]} \cong \ell \text{ para todo } [\ell] \in \mathbb{P}(V).$$

De manera análoga, el **fibrado tautológico** de rango r en $\text{Gr}(r, V)$ es

$$S := \{([\Lambda], v) \in \text{Gr}(r, V) \times V \text{ tal que } v \in \Lambda\} \xrightarrow{p := \text{pr}_1} \text{Gr}(r, V)$$

PULLBACK Y RESTRICCIÓN

Construcción:

Sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial y sea $f : Y \rightarrow X$ un morfismo regular. Entonces, se define el **pullback** de E por f como

$$f^* E := \{(y, z) \in Y \times E \text{ tal que } f(y) = p(z)\} \xrightarrow{\text{pr}_1} Y,$$

un fibrado vectorial en Y , con $\text{rg}(f^* E) = \text{rg}(E)$ y $(f^* E)_y \stackrel{\text{def}}{=} E_{f(y)}$.

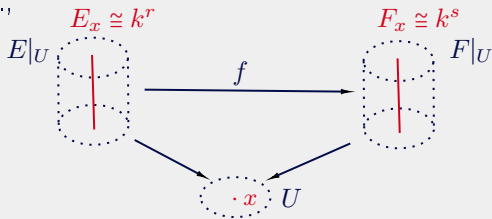
En particular, si $f : Y \hookrightarrow X$ incrustamiento cerrado (i.e., $Y \subseteq X$ subvariedad), entonces $f^* E \stackrel{\text{def}}{=} E|_Y$ es la **restricción** de E a Y .

En términos categóricos, $f^* E$ es el **producto fibrado** del diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^* E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

LA CATEGORÍA $\mathbf{Vect}(X)$

Sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de $\text{rg}(E) = r$ y $\text{rg}(F) = s$. Un **morfismo de fibrados vectoriales** es un morfismo regular $f : E \rightarrow F$ tal que $q \circ f = p$, i.e.,



y para todo $x \in X$, la aplicación $f_x : E_x \cong k^r \rightarrow F_x \cong k^s$ es k -lineal. Así, obtenemos la **categoría $\mathbf{Vect}(X)$ de fibrados vectoriales en X** .

Ejemplo fundamental: Todo morfismo $f : X \times k^r \rightarrow X \times k^s$ entre los **fibrados triviales** cumple $f(x, v) = (x, g(x)v)$, $g(x) \in M_{s \times r}(k) \ \forall x \in X$.

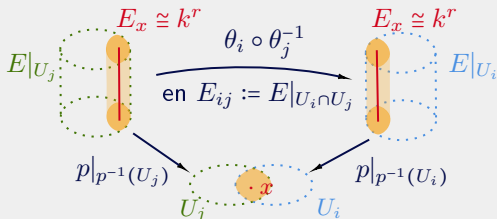
Notar que si $s = r$ y si $g(x_0)$ es invertible para cierto $x_0 \in X$, entonces $g(x) \in \text{GL}_r(k)$ para todo $x \in U$, con U una vecindad abierta de x_0 .

MATRICES DE TRANSICIÓN

Sea $p : E \rightarrow X$ fibrado vectorial y $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ cubrimiento abierto tal que cada U_i trivializa E , i.e., $E|_{U_i} \stackrel{\text{def}}{=} p^{-1}(U_i) \xrightarrow[\theta_i]{\sim} U_i \times \mathbb{A}^r$. En cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$:

$$\begin{array}{ccc}
 E|_{U_i \cap U_j} \stackrel{\text{def}}{=} p^{-1}(U_i \cap U_j) =: E_{ij} & & \\
 \swarrow \theta_j|_{E_{ij}} \cong & \theta_i \circ \theta_j^{-1} & \searrow \theta_i|_{E_{ij}} \cong \\
 (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r & \xrightarrow{\sim} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r \\
 (x, v) & \longmapsto & (x, g_{ij}(x)v)
 \end{array}$$

donde $g_{ij}(x) \in \text{GL}_r(k) \ \forall x \in U_i \cap U_j$, son llamadas **matrices de transición**.



LA CONDICIÓN DE COCICLO

Las matrices de transición verifican que $g_{ii}(x) = I_r$ para todo $x \in U_i$ y en la triple intersección $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ se verifica la **condición de cociclo**

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik} \text{ en } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Esta condición es muy importante pues implica que (módulo isomorfismo¹) E **está completamente determinado** por un cubrimiento abierto y por las matrices de transición:

Construimos E usando el atlas algebraico² obtenido al pegar los $U_i \times \mathbb{A}^r$ usando los isomorfismos siguientes como cambio de carta para todo $i, j \in I$

$$\begin{aligned}(U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r &\xrightarrow{\sim} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r \\ (x, v) &\longmapsto (x, g_{ij}(x)v)\end{aligned}$$

Ejercicio: Sea $V_X \stackrel{\text{def}}{=} X \times \mathbb{A}^r$. Verificar que $g_{ij}(x) = I_r \ \forall i, j \in I$ son matrices de transición para V_X . En particular, $g_{ij}(x) \equiv 1$ para $k_X := X \times \mathbb{A}^1$.

¹Las matrices no son únicas: dependen del cubrimiento abierto y las trivializaciones.

²La condición de cociclo implica que de hecho es un atlas algebraico (ver Clase 6).

FUNCIONES DE TRANSICIÓN

Todo $L \xrightarrow{p} X$ fibrado en rectas (i.e., $\text{rg}(L) = 1$) está determinado (módulo isomorfismo) **por funciones de transición** $g_{ij}(x) \in k^*$ para todo $x \in U_i \cap U_j$.

Si $\mathcal{O}_X^*$ es el haz de funciones regulares que no se anulan, $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$.

Ejemplo: Para el fibrado tautológico $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ de $\mathbb{P}^n$, tenemos que

$$\theta_j^{-1}(x, t) = \left(x, \left(\frac{tx_0}{x_j}, \dots, \frac{tx_n}{x_j} \right) \right) \quad \text{y} \quad \theta_i^{-1}(x, s) = \left(x, \left(\frac{sx_0}{x_i}, \dots, \frac{sx_n}{x_i} \right) \right),$$

de donde obtenemos (igualando coordenadas) el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & p^{-1}(U_i \cap U_j) & \\ \theta_j^{-1} \nearrow \cong & & \searrow \theta_i \cong \\ (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow[\sim]{\theta_i \circ \theta_j^{-1}} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1 \\ (x, t) & \longmapsto & (x, \frac{x_i}{x_j} t) \stackrel{\text{def}}{=} (x, s) \end{array}$$

En particular, deducimos que $g_{ij}(x) = \frac{x_i}{x_j}$ para todo $x \in U_i \cap U_j$.

OPERACIONES CON FIBRADOS VECTORIALES

Sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de $\text{rg}(E) = r$ y $\text{rg}(F) = s$, dados por matrices de transición $g_{ij}(x) \in \text{GL}_r(k)$ y $h_{ij}(x) \in \text{GL}_s(k)$ en un cubrimiento abierto común. Definimos, mediante matrices de transición:

- ❶ $E \oplus F$, con $\text{rg}(E \oplus F) = r + s$, mediante

$$\begin{pmatrix} g_{ij}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_{ij}(x) \end{pmatrix} \in \text{GL}_{r+s}(k).$$

- ❷ $E \otimes F$, con $\text{rg}(E \otimes F) = rs$, mediante $g_{ij}(x) \otimes h_{ij}(x) \in \text{GL}_{rs}(k)$.
❸ El **dual** $E^\vee$, con $\text{rg}(E^\vee) = r$, mediante $g_{ij}^\vee := ({}^t g_{ij}^{-1})(x) \in \text{GL}_r(k)$.
❹ $\mathbf{Hom}(E, F) := E^\vee \otimes F$, con $\text{rg}(\mathbf{Hom}(E, F)) = rs$.
❺ Para $d \in \mathbb{N}$, $S^d E$, con $\text{rg}(S^d E) = \binom{r+d-1}{d}$, mediante $S^d g_{ij}(x)$.
❻ Para $d \in \{0, \dots, r\}$, $\Lambda^d E$, con $\text{rg}(\Lambda^d E) = \binom{r}{d}$, mediante $\Lambda^d g_{ij}(x)$.
❼ El determinante $\det : \text{GL}_r(k) \rightarrow k^*$ determina un *fibrado en rectas* $\det(E) \cong \Lambda^r E$, con funciones de transición $\det(g_{ij}(x))$.

EL GRUPO DE PICARD

Caso particular importante: Sean $L \rightarrow X$ y $M \rightarrow X$ fibrados en recta, dados por funciones de transición g_{ij} y h_{ij} , respectivamente. Entonces:

- ❶ Las funciones $k_{ij} := g_{ij}h_{ij} = h_{ij}g_{ij}$ definen el fibrado en rectas

$$L \otimes M \cong M \otimes L.$$

- ❷ El fibrado en rectas trivial $k_X \stackrel{\text{def}}{=} X \times \mathbb{A}^1$, con $k_{ij} = 1$, verifica

$$k_X \otimes L \cong L \otimes k_X \cong L.$$

- ❸ El dual $L^\vee$, con $g_{ij}^\vee \stackrel{\text{def}}{=} 1/g_{ij}$, verifica $L \otimes L^\vee \cong L^\vee \otimes L \cong k_X$.

El **grupo de Picard** de una variedad algebraica X es el grupo abeliano $\text{Pic}(X) := \{\text{Fibrados en rectas en } X\} / \cong$.

Ejemplo importante: Sea $d \in \mathbb{Z}$. En $\mathbb{P}^n$ definimos el fibrado en rectas

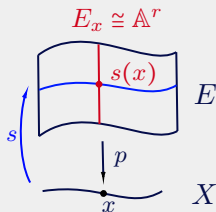
$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \text{ mediante las funciones de transición } g_{ij}(x) = \left(\frac{x_j}{x_i} \right)^d.$$

En particular, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^\vee$ con $g_{ij} = \frac{x_j}{x_i}$.

§3.2 SECCIONES Y HACES LOCALMENTE LIBRES

SECCIONES DE UN FIBRADO

Sea $E \xrightarrow{p} X$ fibrado de rango r . Una **sección** de E es un morfismo regular $s : X \rightarrow E$, $x \mapsto s(x)$ con $p \circ s = \text{Id}_X$, i.e., $s(x) \in E_x \cong k^r$ para todo $x \in X$.



El conjunto de **secciones globales** de E , dado por

$$\Gamma(X, E) := H^0(X, E) := \{s : X \rightarrow E \text{ sección de } E \xrightarrow{p} X\},$$

es un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -módulo: si $s, t \in H^0(X, E)$ y $\lambda \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X(X)$

$$(s + t)(x) := s(x) + t(x) \quad \text{y} \quad (\lambda s)(x) := \lambda(x)s(x).$$

En particular, $H^0(X, E)$ es un k -espacio vectorial.

SECCIONES VÍA MATRICES DE TRANSICIÓN

En términos de matrices de transición, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E|_{U_i} \stackrel{\text{def}}{=} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow[\theta_i]{\sim} & U_i \times \mathbb{A}^r \\
 \swarrow p & & \nwarrow \text{pr}_1 \\
 & U_i & \\
 \nearrow s|_{U_i} & & \nwarrow \sigma_i := \theta_i \circ s|_{U_i}
 \end{array}$$

donde $\sigma_i(x) = (x, s_i(x))$ para todo $x \in U_i$, con

$$s_i(x) = (s_{i,1}(x), \dots, s_{i,r}(x)) \in \mathcal{O}_X(U_i)^{\oplus r}.$$

Más aún, en la intersección $U_i \cap U_j$ tenemos que

$$\begin{array}{ccccc}
 (x, s_j(x)) & \xleftarrow{\theta_j} & s(x) & \xrightarrow{\theta_i} & (x, s_i(x)) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & g_{ij}(x) & &
 \end{array}$$

de donde deducimos que $s_i(x) = g_{ij}(x)s_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$.

La relación fundamental $s_i(x) = g_{ij}(x)s_j(x)$ implica que:

- 1 Si $L \cong X \times \mathbb{A}^1$ fibrado en rectas trivial en X , con $g_{ij} = 1$, entonces $H^0(X, L) \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ se identifica a las secciones globales de $\mathcal{O}_X$.
- 2 De manera similar, si $E \cong X \times \mathbb{A}^r$ entonces $H^0(X, E) \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^{\oplus r}$.

Las secciones de fibrados en rectas **generalizan** el concepto de función regular. En general, pueden haber **muchas** más secciones que funciones.

Ejercicio: Sea $f : Y \rightarrow X$ regular y $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial. Probar que

$$\Gamma(f) : H^0(X, E) \longrightarrow H^0(Y, f^*E), \quad s \longmapsto \Gamma(f)(s),$$
donde $(\Gamma(f)(s))(y) := (y, s(f(y)))$ para todo $y \in Y$, está bien definida y es k -lineal.

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \simeq k[x_0, \dots, x_n]_d$$

Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \rightarrow \mathbb{P}^n$ definido por $g_{ij}(x) = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^d$.

Sea $s_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i)$ regular en $U_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$, el abierto estándar con coordenadas $\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}$. Así, $s_i = \frac{P_i}{x_i^{m_i}}$ donde P_i polinomio homogéneo de grado m_i . Luego, $s_i = g_{ij}s_j$ en $U_i \cap U_j$ si y sólo si

$$\frac{P_i}{x_i^{m_i}} = \frac{x_j^d P_j}{x_i^d x_j^{m_j}}, \text{ i.e., } P_i x_i^{d-m_i} = P_j x_j^{d-m_j}.$$

Luego, si $d \geq 0$ entonces $P := P_i x_i^{d-m_i}$ polinomio homogéneo de grado d tal que $s_i = \frac{P}{x_i^d}$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Así, hay un isomorfismo

$$k[x_0, \dots, x_n]_d \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)), \quad P \mapsto \left\{ s_i = \frac{P}{x_i^d} \right\}_{i=0, \dots, n}$$

entre polinomios homogéneos de grado d y las secciones globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

Del mismo modo, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \{0\}$ si $d < 0$ (Ejercicio).

SECCIONES DE DISTINTOS FIBRADOS Y KÜNNETH

Sean $E \rightarrow X$ y $F \rightarrow X$ fibrados dados por matrices de transición g_{ij} y h_{ij} , respectivamente. Dadas $s \in H^0(X, E)$ y $t \in H^0(X, F)$ definidas por $s_i = g_{ij}s_j$ y $t_i = h_{ij}t_j$, entonces

$$s_i \otimes t_i = (g_{ij}s_j) \otimes (h_{ij}t_j) \stackrel{\text{def}}{=} (g_{ij} \otimes h_{ij})(s_j \otimes t_j),$$

por lo que obtenemos una sección $s \otimes t \in H^0(X, E \otimes F)$.

En general $(s, t) \mapsto s \otimes t$ no es inyectiva ni sobreyectiva. E.g. si $X = \mathbb{P}^n$, $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ y $F = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, entonces $E \otimes F \cong k_X$. En particular,

$$H^0(X, E \otimes F) \cong \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k \neq H^0(X, E) \otimes_k H^0(X, F) = \{0\}.$$

Ejercicio* (fórmula de Künneth): Probar que

$$H^0(X, E) \otimes_k H^0(Y, F) \cong H^0(X \times Y, E \boxtimes F),$$

con $E \boxtimes F := \text{pr}_X^*(E) \otimes \text{pr}_Y^*(F)$ el **producto tensorial exterior** de E y F .

CRITERIO DE TRIVIALIDAD PARA $L \in \text{Pic}(X)$

Sea $L \in \text{Pic}(X)$. Entonces, L es **trivial** (i.e., $L \cong X \times \mathbb{A}^1$) si y sólo si $\exists s \in H^0(X, L)$ que no se anula nunca, i.e., $s(x) \neq 0$ en $L_x \cong k \ \forall x \in X$.

En efecto, en tal caso podemos trivializar L **globalmente** usando s :

$$\begin{array}{ccc} (x, t) & \xrightarrow{\sim} & ts(x) \\ X \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\quad} & L \\ & \searrow \text{pr}_1 \quad \swarrow p & \\ & X & \end{array}$$

Caso particular importante: Sea X variedad irreducible con $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k$ (e.g. proyectiva). En tal caso, si $L \rightarrow X$ es un fibrado en rectas tal que

- ① $\exists s \in H^0(X, L) \setminus \{0\}$ (i.e., $\exists x_0 \in X$ tal que $s(x_0) \neq 0$).
- ② $\exists t \in H^0(X, L^\vee) \setminus \{0\}$ (i.e., $\exists x_1 \in X$ tal que $t(x_1) \neq 0$).

Entonces, $L \cong k_X$ es el fibrado en rectas trivial.

En efecto, $H^0(X, L) \otimes_k H^0(X, L^\vee) \longrightarrow H^0(X, L \otimes L^\vee) \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k$ define $\sigma(x) := s(x) \otimes t(x) \stackrel{\text{def}}{=} s(x)t(x)$ sección constante nunca nula. $\square$

Construcción: Sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial de rango r . Definimos el **haz de secciones** de E asociando a cada $U \subseteq X$ abierto no-vacío

$$\mathcal{E}(U) := H^0(U, E|_U) \stackrel{\text{def}}{=} \{s : U \rightarrow E|_U \text{ morfismo regular tal que } p \circ s = \text{Id}_U\}.$$

Como $\mathcal{E}(U)$ es un $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X(U)$ -módulo, el haz $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo.

Más aún, las trivializaciones

$$\theta_i : E|_{U_i} \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{A}^r$$

inducen **isomorfismos de $\mathcal{O}_{U_i}$ -módulos** $\mathcal{E}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$, i.e., $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo **localmente libre** de rango r (ver Clase 3).

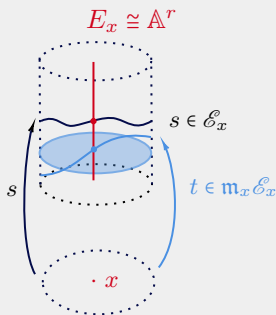
En particular, si $L \rightarrow X$ es un fibrado en rectas, entonces su haz de secciones $\mathcal{L}$ es un **haz invertible** (i.e., un $\mathcal{O}_X$ -módulo localmente libre de rango 1).

Ejemplo importante: Si $L = k_X \stackrel{\text{def}}{=} X \times \mathbb{A}^1$ es el fibrado en rectas **trivial**, entonces por definición $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$.

EN TODO LO QUE SIGUE DEL CURSO,
 $\mathcal{O}_X$ DENOTA EL HAZ DE FUNCIONES
REGULARES O BIEN EL FIBRADO EN
RECTAS TRIVIAL $X \times \mathbb{A}^1$
(DEPENDIENDO DEL CONTEXTO).

TALLOS DE $\mathcal{E}$ VERSUS FIBRAS DE E

Sea $E \rightarrow X$ un fibrado vectorial, y sea $\mathcal{E}$ el haz de secciones asociado.



Para $x \in X$, sea $\mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x \subseteq \mathcal{E}_x$ el submódulo de gérmenes de secciones que se anulan en $x \in X$. Entonces, tenemos una aplicación k -lineal sobreyectiva

$$\text{ev}_x : \mathcal{E}_x \twoheadrightarrow E_x, s \longmapsto s(x)$$

con $\ker(\text{ev}_x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$, de donde deducimos que

$$\mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x \cong E_x \text{ para todo } x \in X.$$