

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 14

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

21 DE SEPTIEMBRE DE 2026

§2.15 NORMALIZACIÓN Y TEOREMA PRINCIPAL DE ZARISKI

RECUERDOS DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA

Si $\varphi : A \rightarrow B$ morfismo de anillos, $x \in B$ es **entero sobre A** (resp. a φ) si:

- ❶ $\exists$ relación *mónica* $x^n + \varphi(a_1)x^{n-1} + \dots + \varphi(a_{n-1})x + \varphi(a_n) = 0$, i.e.,
- ❷ $A[x] \subseteq B$ es un A -módulo finitamente generado.

Así, si $x, y \in B$ enteros sobre A entonces $x \pm y$, xy también (por 2). Luego,

$\overline{A} := \{b \in B, b \text{ es entero sobre } A\} \subseteq B$ es una A -álgebra,

llamada la **clausura integral** de A en B . Decimos que A es **integralmente cerrado** en B si $\overline{A} = \varphi(A)$ (i.e., " $\overline{A} = A$ " si φ inyectivo). Explícitamente,

Todo $b \in B$ entero sobre A verifica $b = \varphi(a)$ para cierto $a \in A$.

- (a) Sea B una A -álgebra y C una B -álgebra (e.g. $A \subseteq B \subseteq C$). Si $x \in C$:
- (i) Si $x \in C$ es entero sobre A , entonces $x \in C$ es entero sobre B .
 - (ii) Si B es A -módulo f. g. y $x \in C$ entero sobre B , $x \in C$ entero sobre A .
- (b) Tenemos que $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Ejemplos:

- 1 El anillo $\mathbb{Z}$ es integralmente cerrado en $\mathbb{Q}$.
- 2 Más generalmente, si K es un *cuerpo de números* (i.e., una extensión finita $\mathbb{Q}$) entonces $\overline{\mathbb{Z}} := \mathcal{O}_K$ es el **anillo de enteros** del cuerpo K .
- 3 En la curva nodal

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^2 + x^3\},$$

la función racional $t := \frac{y}{x} \in k(X)$ es entera sobre $\mathcal{O}(X)$, ya que $t^2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + x$, pero $t \notin \mathcal{O}(X)$.

Definición (Zariski, 1939)

Sea A **dominio entero** y $\text{Fr}(A)$ su cuerpo de fracciones. La clausura integral $\overline{A}$ en $\text{Fr}(A)$ es llamada la **normalización** de A , denotada A^ν .

Diremos que A es un **anillo normal** si $A = A^\nu$, i.e., todo $x \in \text{Fr}(A)$ entero sobre A *pertenece a* A .

La definición anterior se geometriza naturalmente:

Sea X variedad algebraica **irreducible**. Decimos que $x \in X$ es un **punto normal** si el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es normal (i.e., si $\mathcal{O}_{X,x}$ es integralmente cerrado en $k(X)$). Decimos que X es **normal** si todo $x \in X$ es normal.

VARIEDADES NORMALES: CASO AFÍN

Sea X variedad algebraica **afín** e irreducible. Entonces,

X es normal $\Leftrightarrow \mathcal{O}(X)$ es integralmente cerrado en $k(X)$.

($\Leftarrow$) Sea $u \in k(X)$ tal que para *cierto* $x \in X$ existen $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ con

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \text{ en } k(X).$$

Si $a_i = \frac{p_i}{q_i}$ con $p_i, q_i \in \mathcal{O}(X)$ y $q_i(x) \neq 0$, entonces $v := uq_1 \cdots q_n$ es entero sobre $\mathcal{O}(X)$, y así $v \in \mathcal{O}(X)$. Luego, $u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v}{q_1 \cdots q_n} \in \mathcal{O}_{X,x}$ ya que $q_i(x) \neq 0 \ \forall i$.

($\Rightarrow$) Sea $u \in k(X)$ tal que existen $a_i \in \mathcal{O}(X)$ con

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Como $a_i \in \mathcal{O}_{X,x} \ \forall x \in X$, tenemos que $u \in \mathcal{O}_{X,x} \ \forall x \in X$. En otras palabras, $u \in \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}(X)$ es regular. $\square$

Ejemplo: La curva nodal $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2, y^2 = x^2 + x^3\}$ **no** es normal, pues $t := \frac{y}{x} \in k(X)$ es entero pero no regular.

LEMA DE GAUSS

Sea X una variedad algebraica irreducible. Entonces,

Si $x \in X_{\text{reg}}$ es un punto **suave**, entonces $x \in X$ es **normal**.

En efecto, basta asumir X afín y consider $u \in k(X) \cong \text{Fr}(\mathcal{O}(X))$ tal que

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

con $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$. Dado que $\mathcal{O}_{X,x}$ es un **anillo factorial** (Nagata), podemos escribir $u = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathcal{O}_{X,x}$ relativamente primos. Luego,

$$p^n + a_1 p^{n-1} q + \cdots + a_n q^n = 0$$

por lo que q divide a p^n , y luego q es una unidad (dado que p y q son relativamente primos), i.e., $q(x) \neq 0$. Así, $u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p}{q}$ pertenece a $\mathcal{O}_{X,x}$. $\square$

RECÍPROCO DÉBIL DE TEOREMA DE KRULL

Sea X variedad irreducible **normal** y sea $Y \subseteq X$ sub-variedad cerrada de codimensión pura 1. Entonces, existe $U \subseteq X$ abierto afín con $U \cap Y \neq \emptyset$ y $f : U \rightarrow k$ regular tal que $\mathcal{I}(U \cap Y) = \langle f \rangle$.

Notar que no podemos considerar $U := X_{\text{reg}}$ y aplicar el resultado en el caso suave (consecuencia de Nagata), pues podría ocurrir que $Y \subseteq X_{\text{sing}}$.

Supongamos X afín e $Y = V(\mathfrak{p})$ irreducible, donde $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}(X)$ ideal primo. Sea $g \in \mathfrak{p}$ no-nulo, con $Y \subseteq V(g)$ y luego $Y = V(g)$ (Krull). Entonces,

$$\mathcal{I}(Y) = \sqrt{\langle g \rangle}, \text{ i.e., } \mathcal{I}(Y)^\ell \subseteq \langle g \rangle \subseteq \mathcal{I}(Y) \quad (\text{Nullstellensatz})$$

para cierto $\ell \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ minimal. Veamos que *localmente* $\ell = 1$:

Supongamos $\ell \geq 2$ y sean $u_1, \dots, u_{\ell-1} \in \mathcal{I}(Y)$ tales que $h := u_1 \cdots u_{\ell-1} \notin \langle g \rangle$ pero $ah \in \langle g \rangle$ para todo $a \in \mathcal{I}(Y)$. Así, la función racional $u := \frac{h}{g} \notin \mathcal{O}(X)$ no es regular, pero $u\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{O}(X)$.

RECÍPROCO DÉBIL DE TEOREMA DE KRULL

Notar que $u\mathcal{I}(Y) \not\subseteq \mathcal{I}(Y)$, pues **en caso contrario** existirían generadores $p_1, \dots, p_N \in \mathcal{I}(Y)$ de $\mathcal{I}(Y)$ tales que $up_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}p_j$ con $a_{ij} \in \mathcal{O}(X)$. Matricialmente, esto último equivale a

$$(uI_N - (a_{ij})_{i,j}) \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = 0, \text{ de donde deducimos } \det(uI_N - (a_{ij})_{i,j}) = 0.$$

Esta ecuación *mónica* implica $u \in \mathcal{O}(X)$ (X normal), lo cual es **imposible**.

Luego, existe $f \in \mathcal{I}(Y)$ tal que $s := fu \notin \mathcal{I}(Y)$, i.e., $Y \not\subseteq V(s) \subseteq X$. Así, el abierto siguiente intersecta Y

$$U := \{x \in X \text{ tal que } s(x) \neq 0\}$$

y se tiene $f^{-1}\mathcal{I}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} s^{-1}u\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{O}(U)$, i.e., $\mathcal{I}(U \cap Y) = \langle f \rangle$. □

$\text{codim}_X \text{Sing}(X) \geq 2$ (SUAVIDAD EN CODIM 1)

Sea X variedad irreducible **normal**. Entonces, $\text{codim}_X \text{Sing}(X) \geq 2$.

Supongamos que $Y \subseteq \text{Sing}(X)$ componente irreducible de codimensión 1. Luego, podemos suponer X afín y $\mathcal{I}(Y) = \langle f \rangle$. Así, para $y \in Y$ tenemos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,y} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{O}_{X,y}/\langle f \rangle \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{m}_{X,y} & \longrightarrow & \mathfrak{m}_{Y,y} = \mathfrak{m}_{X,y}/\langle f \rangle \end{array}$$

Sea $y \in Y_{\text{reg}}$ suave, y supongamos que $y \in \text{Sing}(X)$. Notar que si $\mathfrak{m}_{Y,y}$ está generado por $v_1, \dots, v_{n-1}$ (coord. locales en Y) entonces $\mathfrak{m}_{X,y}$ está generado por $v_1, \dots, v_{n-1}, f$. En particular,

$$\dim_k(T_y X) = \dim_k(\mathfrak{m}_{X,y}/\mathfrak{m}_{X,y}^2) \leq n \stackrel{\text{def}}{=} \dim_y(X),$$

i.e., $y \in Y$ es suave en X , **una contradicción**. □

Si C curva algebraica irreducible, entonces C es suave $\Leftrightarrow C$ es normal.

NORMALIZACIÓN

Sea X variedad **afín** irreducible, y consideramos la clausura integral

$$\mathcal{O}(X) \subseteq A \subseteq k(X) \text{ con } A := \overline{\mathcal{O}(X)}.$$

Aquí, A es una k -álgebra finitamente generada y reducida. Definimos

$$X^\nu := \operatorname{Specm}(A), \text{ que cumple } \mathcal{O}(X^\nu) \cong A.$$

La inclusión $\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{O}(X^\nu)$ induce $\nu : X^\nu \rightarrow X$ **regular sobreyectivo**, la **normalización** de X . Las propiedades de la clausura integral implican:

- 1 X^ν es normal y $\nu : X^\nu \rightarrow X$ es un isomorfismo en una vecindad de cada punto normal $x \in X$ (cf. **resolución de singularidades**).
- 2 $\nu : X^\nu \rightarrow X$ **morfismo finito y birracional**, pues $\operatorname{Fr}(A) = k(X)$.
- 3 Si $g : Y \rightarrow X$ finito y birracional con Y irreducible, $k(X) \cong k(Y)$ y

$$\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{O}(Y) \subseteq k(Y) \cong k(X),$$

con $\mathcal{O}(Y)$ entero sobre $\mathcal{O}(X)$, y así $\mathcal{O}(Y) \subseteq \overline{\mathcal{O}(X)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}(X^\nu)$, de donde se obtiene $\widehat{g} : X^\nu \rightarrow Y$. En resumen, se tiene:

NORMALIZACIÓN

Para todo $g: Y \rightarrow X$ finito birracional con Y irreducible,

$\exists! \widehat{g}: X^\nu \rightarrow Y$ tal que $g \circ \widehat{g} = \nu$, i.e., g factoriza a la normalización.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \nwarrow \exists! \widehat{g} & \nearrow \nu \\ & X^\nu & \end{array}$$

- ④ Si $h: Z \rightarrow X$ dominante con Z afín irreducible **normal**, entonces $u \in \mathcal{O}(X^\nu)$ es entero sobre $\mathcal{O}(X) \subseteq k(X) \subseteq k(Z)$ (via h^*).

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}(X) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(X^\nu) & \hookrightarrow & k(X) & \xrightarrow{h^*} & k(Z) \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & \mathcal{O}(Z) \end{array}$$

Como $\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{O}(Z)$ via h^* , a posteriori u es entero sobre $\mathcal{O}(Z)$ y, como $\mathcal{O}(Z)$ es integralmente cerrado, $u \in \mathcal{O}(Z)$, i.e., $\mathcal{O}(X^\nu) \subseteq \mathcal{O}(Z)$, de donde se obtiene $\widehat{h}: Z \rightarrow X^\nu$. En resumen, se tiene:

NORMALIZACIÓN

Para todo $h : Z \rightarrow X$ dominante con Z afín irreducible **normal**,
 $\exists! \widehat{h} : Z \rightarrow X^\nu$ tal que $h = \nu \circ \widehat{h}$, i.e., h se factoriza por la normalización.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{h} & X \\ & \searrow \exists! \widehat{h} & \nearrow \nu \\ & X^\nu & \end{array}$$

Todo lo implica que X^ν es **única** (salvo isomorfismo) para X afín. En efecto, si $\nu_1 : X_1^\nu \rightarrow X$ y $\nu_2 : X_2^\nu \rightarrow X$ son dos normalizaciones de X , entonces existe un isomorfismo $\varphi : X_1^\nu \xrightarrow{\sim} X_2^\nu$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} X_1^\nu & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & X_2^\nu \\ & \searrow \nu_1 \quad \swarrow \nu_2 & \\ & X & \end{array}$$

Toda variedad irreducible X posee una *única* normalización $\nu : X^\nu \rightarrow X$, obtenida al considerar un atlas afín de X y pegar las normalizaciones.

TEOREMA PRINCIPAL DE ZARISKI

Teorema Principal de Zariski (1943)

Sean X e Y variedades irreducibles y $f : X \rightarrow Y$ morfismo **birracional**.
Sea $x \in X$ tal que $y = f(x)$ es un punto **normal** en Y . Entonces:

- ❶ f es un isomorfismo entre vecindades afines de $x \in X$ e $y \in Y$, o bien
- ❷ $\exists$ hipersuperficie irreducible $x \in E \subseteq X$ tal que $\text{codim}_Y(\overline{f(E)}) \geq 2$.

En particular, en el caso (2) se tiene $\dim_x f^{-1}(y) \geq 1$.

Si $f : X \rightarrow Y$ morfismo birracional donde el conjunto de puntos

$$Z := \{x \in X \text{ tal que } \dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq 1\}$$

no es una hipersuperficie, entonces $f(Z) \subseteq Y$ está contenido en el lugar de puntos **no-normales** de Y (!). E.g. si $\dim(X) = \dim(Y) = 3$ y f **no** es un isomorfismo en $C \subseteq X$ curva irred., entonces $f(C) = \{y_0\}$ **no** es normal.

TEOREMA PRINCIPAL DE ZARISKI

Prueba cuando $y \in Y_{\text{reg}}$: Podemos suponer X e Y afines, y sean $u_1, \dots, u_N \in \mathcal{O}(X)$ generadores (definiendo $X \subseteq \mathbb{A}^N$). Recordemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(Y) & \xhookrightarrow{f^*} & \mathcal{O}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,y} & \xhookrightarrow{f^*} & \mathcal{O}_{X,x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(Y) & \xrightarrow[\cong]{f^*} & k(X) \end{array}$$

Podemos ver las u_i como funciones racionales y $u_i = f^*(v_i) = f^*\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$ para $a_i, b_i \in \mathcal{O}(Y)$. Más aún, dado que $y \in Y$ es un punto suave tenemos que $\mathcal{O}_{Y,y}$ es factorial (Nagata), y luego asumimos a_i y b_i relativamente primos.

TEOREMA PRINCIPAL DE ZARISKI

Caso (1). Si $b_i(y) \neq 0$ para todo i , obtenemos una inclusión

$$\varphi : \mathcal{O}(Y)_{b_1 \cdots b_N} \cong \mathcal{O}(V) \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}(X)_{f^*(b_1 \cdots b_N)} \cong \mathcal{O}(U),$$

donde $V = \{y \in Y \text{ tal que } (b_1 \cdots b_N)(y) \neq 0\}$ y donde $U \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(V)$.

En este caso tenemos que $U \cong V$. En efecto, podemos escribir

$$u_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f^*(a_i)}{f^*(b_i)} = \frac{f^*(a_i) \prod_{j \neq i} f^*(b_j)}{f^*(b_1 \cdots b_N)},$$

por lo que u_i está en la imagen de f^* , i.e., φ es sobreyectivo.

TEOREMA PRINCIPAL DE ZARISKI

Caso (2). Supongamos $b_1(y) = 0$. En el anillo factorial $\mathcal{O}_{Y,y}$, escribimos $b_1 = c_1 d_1$ con c_1 irreducible y tal que $c_1(y) = 0$.

En $\mathcal{O}_{Y,y}$, $a_1 = \frac{a'_1}{a''_1}$ y $c_1 = \frac{c'_1}{c''_1}$ con $a''_1(y)c''_1(y) \neq 0$. Si nos restringimos a los abiertos afines donde $a''_1 \neq 0$, $c''_1 \neq 0$, $f^*(a''_1) \neq 0$, $f^*(c''_1) \neq 0$ podemos suponer que $a_1, c_1 \in \mathcal{O}(Y)$ y $f^*(a_1), f^*(c_1) \in \mathcal{O}(X)$ regulares.

Consideremos la hipersuperficie $E := V(f^*(c_1)) \subseteq X$ y notar que $x \in E$ pues $f^*(c_1)(x) \stackrel{\text{def}}{=} c_1(f(x)) \stackrel{\text{def}}{=} c_1(y) = 0$. Restringiéndose a una comp. irreducible de E que pase por x podemos suponer E irreducible.

Notar que $f^*(a_1) \stackrel{\text{def}}{=} f^*(b_1)u_1 \stackrel{\text{def}}{=} f^*(c_1)f^*(d_1)u_1$, y luego a_1 se anula en $\overline{f(E)}$. Finalmente, dado que a_1 y c_1 son relativamente primos entre sí en $\mathcal{O}_{Y,y}$ (i.e., determinan ecuaciones locales independientes), tenemos que

$$\overline{f(E)} \not\subseteq V(c_1) \not\subseteq Y$$

y luego $\text{codim}_Y(\overline{f(E)}) \geq 2$. □

TEOREMA DE CONEXIDAD DE ZARISKI

En 1957, Zariski extiende parte del resultado anterior.

Teorema de Conexidad de Zariski

Sean X e Y variedades irreducibles y $f : X \rightarrow Y$ morfismo **dominante**. Si X es **proyectiva** y las fibras *generales* de f son **conexas**, entonces:

Para todo punto **normal** $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y)$ es conexa.

En el caso en que f es **birracional**, las fibras *generales* son singletons (luego conexos). Luego, fibras sobre puntos normales consisten en:

- 1 Singletons (caso (1)), o bien
- 2 Sub-variedades con comp. irreducibles de dimensión ≥ 1 (caso (2)).

FACTORIZACIÓN DE STEIN

Otra consecuencia **muy útil** para factorizar morfismos regulares $f : X \rightarrow Y$ desde X proyectiva normal en $f' : X \rightarrow Y'$ con Y' proyectiva normal:

Teorema (Factorización de Stein, 1956)

Sean X e Y **proyectivas** irreducibles y $f : X \rightarrow Y$ regular. Entonces,

$$f : X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$$

con Y' **proyectiva** irreducible, $f' : X \rightarrow Y'$ tiene fibras *conexas* y $g : Y' \rightarrow Y$ morfismo *finito*. Más aún, si X es normal entonces Y' es normal.

En particular, todo morfismo regular no-constante entre **curvas** algebraicas irreducibles proyectivas $f : X \rightarrow Y$ se factoriza en un morfismo *biyectivo* $f' : X \rightarrow Y'$ y un morfismo *finito* $g : Y' \rightarrow Y$.

Si $\text{car}(k) = p > 0$, el morfismo biyectivo f' puede **no** ser un isomorfismo. Por ejemplo, $f' : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $[x, y] \mapsto [x^p, y^p]$.