

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 11

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

7 DE SEPTIEMBRE DE 2026

RESUMEN: DIMENSIÓN Y MORFISMOS FINITOS

Si X variedad algebraica irreducible, su **dimensión** y su **dimensión de Krull** son

$$\dim(X) := \text{tr. deg}_k(k(X)) \text{ y } \dim_{\text{Krull}}(X) := \max\{d \in \mathbb{N}\},$$

donde el máximo es sobre las cadenas $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d \subseteq X$ de cerrados irreducibles.

Por otra parte, $f : X \rightarrow Y$ es un **morfismo finito** si existe un cubrimiento de Y por abiertos afines V_i tales que $U_i := f^{-1}(V_i)$ es afín y $\mathcal{O}(U_i)$ es un $\mathcal{O}(V_i)$ -módulo finitamente generado. Vimos que:

- 1 La condición anterior se cumple para todo abierto afín $V \subseteq Y$, y la composición de morfismos finitos es finita.
- 2 Toda fibra $f^{-1}(y) \subseteq X$ es un **conjunto finito**, y la imagen $\text{Im}(f) \subseteq Y$ es **cerrada**.

Hoy: veremos que $\dim(X) = \dim_{\text{Krull}}(X)$, gracias a la normalización de Noether.

§2.11 DIMENSIÓN Y MORFISMOS FINITOS

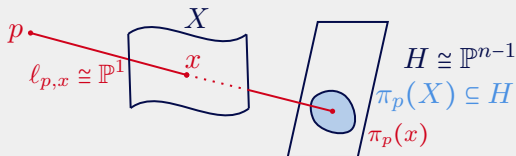
PROYECCIONES LINEALES

Notamos que si $p \in \mathbb{A}^n$, el blow-up $\varepsilon : \text{Bl}_p(\mathbb{A}^n) \rightarrow \mathbb{A}^n$ **no** es un morfismo finito, pues $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ tiene cardinal infinito. Por otra parte:

Sea $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ cerrado propio y $p \in \mathbb{P}^n$ tal que $p \notin X$. Dado un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ con $p \notin H$, la **proyección de p a H** como el morfismo

$$\pi_p : X \longrightarrow H \cong \mathbb{P}^{n-1}, x \mapsto \pi_p(x)$$

con $\pi_p(x) \in H$ la intersección de la recta $\ell_{p,x} := \langle p, x \rangle \cong \mathbb{P}^1$, que pasa por p y x , con el hiperplano H (i.e., $\ell_{p,x} \cap H = \{\pi_p(x)\}$).



Podemos asumir $p = [1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{P}^n$ y $H = \{x_0 = 0\}$, i.e., $\pi_p([x_0, \dots, x_n]) = [0, x_1, \dots, x_n]$, y $\pi_p(X) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ es indep. de H (módulo cambio de coord).

PROYECCIONES LINEALES

Con la notación anterior, $\pi_p : X \rightarrow H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ morfismo finito

En efecto, como $X = V(f_1, \dots, f_r) \stackrel{\text{def}}{=} V(f_1) \cap \dots \cap V(f_r) \subseteq \mathbb{P}^n$, basta suponer que $X = V(f)$ hipersuperficie con $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogéneo de grado d . Asumimos $p = [1, 0, \dots, 0]$ y $H = \{x_0 = 0\}$. Como $f(p) \neq 0$, f se escribe

$$f = x_0^d + \sum_{i=1}^d g_i(x_1, \dots, x_n) x_0^{d-i}.$$

En $U_n = \{x_n \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ con coord. $y_0, \dots, y_{n-1}$, $\pi^{-1}(H \cap U_n) \stackrel{\text{def}}{=} X \cap U_n$ y $\pi_p|_{U_n} : X \cap U_n \mapsto H \cap U_n \cong \mathbb{A}^{n-1}$, $(y_0, \dots, y_{n-1}) \mapsto (0, y_1, \dots, y_{n-1})$.

Notar que $\mathcal{O}(X \cap U_n)$ entero sobre $\mathcal{O}(H \cap U_n) \cong k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ pues

$$y_0^d + \sum_{i=1}^d a_i y_0^{d-i} = 0 \text{ donde } a_i := g_i(y_1, \dots, y_{n-1}, 1) \in \mathcal{O}(H \cap U_n)$$

implica que y_0 entero sobre $\mathcal{O}(H \cap U_n)$. Reemplazando U_n por U_i con $i \in \{0, \dots, n\}$, concluimos que $\pi_p : X \rightarrow H$ morfismo finito. $\square$

NORMALIZACIÓN DE NOETHER

Teorema (Emmy Noether, 1926)

Para toda X variedad algebraica afín existe un morfismo finito sobreyectivo $f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$ para cierto $d \in \mathbb{N}$.

Prueba: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Si $X = \mathbb{A}^n$ el resultado es trivial, y luego consideramos $X \subsetneq \mathbb{A}^n \cong U_0 = \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ cerrado propio. Sea $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ la clausura proyectiva de X , con $X \cong \overline{X} \cap U_0$.

Luego, si $p \notin U_0$ con $p \notin \overline{X}$ y $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ un hiperplano tal que $p \notin H$, entonces $\pi_p : \overline{X} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1} \cong H$ es finito y luego $\pi_p|_X : X \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ también.

Si $\pi_p|_X$ es sobreyectiva obtenemos el resultado. Sino, podemos continuar proyectando hasta obtener $X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$ finito y sobreyectivo. $\square$

La demostración implica que si $X \subsetneq \mathbb{A}^n$ cerrado propio, entonces existe $f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$ morfismo finito sobreyectivo, y además se puede asumir $d < n$.

GOING-UP Y GOING-DOWN

Noether: para toda $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín existe un morfismo finito sobreyectivo

$f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$ para cierto $d \in \mathbb{N}$, con $d < n$ si $X \subsetneq \mathbb{A}^n$ cerrado propio.

Lema de Going-up y Going-down (Cohen-Seidenberg, 1946)

Sea $f : X \rightarrow Y$ morfismo finito sobreyectivo. Entonces,

- 1 $\forall Y' \subseteq Y$ cerrado irred., $\exists X' \subseteq X$ cerrado irred. tal que $f(X') = Y'$.
- 2 Si $X', X'' \subseteq X$ cerrados irreducibles **distintos** con $f(X') = f(X'')$, entonces X' y X'' **no son comparables** (i.e., $X' \not\subseteq X''$ y $X'' \not\subseteq X'$).

Prueba: En (1), escribimos $f^{-1}(Y') = X_1 \cup \dots \cup X_m$ con X_i cerrado irred. Luego, $Y' = f(X_1) \cup \dots \cup f(X_m)$ con $f(X_i)$ cerrado pues f **finito**. Como Y' irreducible, $Y' = f(X_i)$ para cierto $X_i =: X'$.

En (2), **Ejercicio** (cf. Apunte): si $X' \not\subseteq X''$ y $x \in X'' \setminus X'$, se toma u regular en una vecindad afín con $u(x) \neq 0$ y $u \equiv 0$ en X' . Una relación de dependencia entera de u sobre $\mathcal{O}(f(X''))$ de grado **minimal** da la **contradicción**. $\square$

DIMENSIÓN Y MORFISMOS FINITOS

Si $f : X \rightarrow Y$ morfismo finito sobre yectivo entre variedades **irreducibles**:

- ❶ $\dim(X) = \dim(Y)$, y además
- ❷ $\dim_{\text{Krull}}(X) = \dim_{\text{Krull}}(Y)$.

Prueba: En (1): asumimos X e Y afines, pues la dimensión es invariante birracional. Luego, $\mathcal{O}(X)$ entero sobre $\mathcal{O}(Y)$ via $f^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$, de donde $k(X)$ extensión algebraica de $k(Y)$. En particular,

$$\text{tr. deg}_k(k(X)) = \text{tr. deg}_k(k(Y)), \text{ i.e., } \dim(X) = \dim(Y).$$

En (2): si $X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_d$ cerrados irreducibles en X , consideramos $Y_0 \subseteq \dots \subseteq Y_d$ en Y , donde $Y_i := f(X_i)$ irreducible y cerrado pues f morfismo finito. Por Cohen-Seidenberg: $Y_i \neq Y_{i+1}$ y luego $\dim_{\text{Krull}}(Y) \geq \dim_{\text{Krull}}(X)$.

Si $Y_0 \subsetneq \dots \subsetneq Y_d$ cerrados irreducibles en Y , Cohen-Seidenberg permite hallar $X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_d$ cerrados irreducibles en X : $\dim_{\text{Krull}}(X) \geq \dim_{\text{Krull}}(Y)$. $\square$

COMPARANDO DIMENSIONES

Teorema

Sea X variedad algebraica irreducible. Entonces, $\dim(X) = \dim_{\text{Krull}}(X)$.

Prueba: Podemos asumir $X \subseteq \mathbb{A}^n$, y procedemos por inducción en n :

Si $X \subsetneq \mathbb{A}^n$ cerrado propio $\exists f : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ morfismo finito sobreyectivo con $m < n$ (normalización de Noether). Luego, mezclando el resultado anterior y la hipótesis de inducción obtenemos:

$$\dim_{\text{Krull}}(X) = \dim_{\text{Krull}}(\mathbb{A}^m) = \dim(\mathbb{A}^m) = \dim(X).$$

Si $X = \mathbb{A}^n$ entonces $\dim(\mathbb{A}^n) = n$ y $\dim_{\text{Krull}}(\mathbb{A}^n) \geq n$. Sean $X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_d = \mathbb{A}^n$ cerrados irreducibles y notar que $\dim_{\text{Krull}}(X_{d-1}) \geq d-1$. Como $X_{d-1} \subsetneq \mathbb{A}^n$ existe $f : X_{d-1} \rightarrow \mathbb{A}^m$ morfismo finito sobreyectivo con $m < n$.

Luego, $d-1 \leq \dim_{\text{Krull}}(X_{d-1}) = \dim_{\text{Krull}}(\mathbb{A}^m) = m \leq n-1$, de donde deducimos que $d \leq n$, y así $\dim_{\text{Krull}}(\mathbb{A}^n) = n$. $\square$

Ejercicio útil: Probar que si $Z \subsetneq X$ cerrado propio, $\dim(Z) < \dim(X)$.

KRULL HAUPTIDEALSATZ

Mencionemos el siguiente resultado fundamental de Álgebra Conmutativa:

Hecho (Teorema del ideal principal de Krull, 1928)

Si X variedad algebraica irreducible afín y $f \in \mathcal{O}(X) \setminus \{0\}$ no-invertible, toda componente irreducible de $V(f) \subseteq X$ es de dimensión $\dim(X) - 1$.

Terminología: Sea X una variedad algebraica irreducible de $\dim(X) = n$. Decimos que X es una

- ① **curva** si $n = 1$,
- ② **superficie** si $n = 2$,
- ③ **threefold** si $n = 3$,
- ④ **fourfold** si $n = 4$, etc.

Hablamos de *curvas algebraicas*, *superficies algebraicas*, *threefolds algebraicos*, etc. para referirse a una variedad algebraica de dichas dimensiones.

§2.12 DIMENSIÓN DE MORFISMOS Y APLICACIONES

NÚMERO DE ECUACIONES Y DIMENSIÓN

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ variedad quasi-proyectiva irreducible de $\dim(X) = n$, y sean $f_1, \dots, f_r \in k[X_0, \dots, X_N]$ polinomios homogéneos no-constant. Si

$$Y := X \cap V(f_1, \dots, f_r) \subseteq X,$$

cada componente irreducible Z de Y es de $\dim(Z) \geq n - r$.

Prueba (inducción en r): El caso $r = 1$ sigue por Teorema de Krull, y luego asumimos $r \geq 2$: Notar que $Z \subseteq X \cap V(f_1, \dots, f_{r-1})$ y luego $Z \subseteq W$ para cierta $W \subseteq X \cap V(f_1, \dots, f_{r-1})$ componente irreducible.

Por inducción, $\dim(W) \geq n - r + 1$. Si $f_r \equiv 0$ en W , $\dim(Y) = \dim(W) \geq n - r + 1 \geq n - r$. Si $f_r \not\equiv 0$ en W , considerar $x \in Z$ y $x \in U \subseteq W$ abierto afín:

Como Z y W irreducibles, U es denso, y así $\dim(Z) = \dim(Z \cap U)$ y $\dim(W) = \dim(U)$. Sea $g_r := f_r|_U \neq 0$, donde $Z \cap U$ es una componente irreducible de $V(g_r)$. El Teorema de Krull implica que

$$\dim(Z \cap U) = \dim(U) - 1 \geq (n - r + 1) - 1 = n - r \quad \square$$

INTERSECCIONES COMPLETAS

La desigualdad $\dim(Y) \geq n - r$ puede ser **estrícta**: la cúbica torcida $C = \nu_3(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^3$ está dada por 3 ecuaciones y $\dim(C) = 1 > 3 - 3 = 0$.

Definición (codimensión, intersecciones completas)

Sea X variedad algebraica de dimensión pura n , y $Y \subseteq X$ una subvariedad cerrada. La **codimensión** de Y en X es

$$\operatorname{codim}_X(Y) := \dim(X) - \dim(Y) = n - \dim(Y).$$

Una variedad (quasi-)proyectiva de dimensión n en $\mathbb{P}^N$ es una **intersección completa** si puede ser definida por $c = N - n$ ecuaciones.

Conjetura (Hartshorne, 1974): abierta incluso si $N = n + 2$

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ variedad proyectiva **suave** de dimensión n tal que $3n > 2N$. Entonces, X es una intersección completa.

Sean X e Y variedades irreducibles de $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) = m$.

- 1 $\dim(X \times Y) = n + m$: Basta asumir X e Y son afines y considerar (normalización de Noether) morfismos sobreyectivos finitos

$$f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n \text{ y } g : Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m, \text{ donde}$$

$f \times g : X \times Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^{n+m}$ sobreyectivo finito, i.e., $\dim(X \times Y) = n + m$.

- 2 Si $X = V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad alg. proyectiva y $C(X) := V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ el cono afín de X , $\dim(C(X)) = \dim(X) + 1$ (Ejercicio).

- 3 Si $X, Y \subseteq \mathbb{A}^N$ afines con $X \cap Y \neq \emptyset$, toda componente irred. Z de $X \cap Y$ es de dimensión $\geq \dim(X) + \dim(Y) - N \stackrel{\text{def}}{=} n + m - N$, i.e.,

$$\text{codim}(X \cap Y) \leq \text{codim}(X) + \text{codim}(Y).$$

En efecto, $X \cap Y \cong (X \times Y) \cap \Delta_{\mathbb{A}^N}$ está dado en $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^N$ por las N ecuaciones $x_i = y_i$ con $i \in \{1, \dots, N\}$. Luego, tenemos que $\dim(Z) \geq \dim(X \times Y) - N \stackrel{\text{def}}{=} n + m - N$.

Aplicación importante

Supongamos que $X, Y \subseteq \mathbb{P}^N$ son variedades algebraicas proyectivas, y que $\dim(X) + \dim(Y) \geq N$. Entonces, $X \cap Y \neq \emptyset$.

Prueba: Los conos afines $C(X), C(Y) \subseteq \mathbb{A}^{N+1}$ son de dimensión $n + 1$ y $m + 1$ respectivamente (por (2)). Además, $0 \in C(X) \cap C(Y) \neq \emptyset$, y luego (3) implica que cada componente de $C(X) \cap C(Y)$ es de dimensión $\geq (n + 1) + (m + 1) - (N + 1) = n + m - N + 1 \geq 1$. $\square$

Teorema de Bézout (versión baby)

Todo par de curvas proyectivas planas $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ se intersectan.

Teorema (semi-continuidad superior de la dimensión)

Sean X e Y variedades irreducibles de $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) = m$.

Entonces, para todo $f : X \rightarrow Y$ morfismo regular sobreyectivo se tiene:

- 1 $\forall y \in Y$, toda componente irred. de $f^{-1}(y)$ es de dimensión $\geq n - m$.
- 2 $\exists V \subseteq Y$ abierto denso con $f^{-1}(y)$ de dimensión pura $n - m$ $\forall y \in V$.
- 3 Para todo $r \in \mathbb{N}$, $X_r := \{x \in X \text{ tal que } \dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq r\}$ es cerrado en X , i.e., la función

$$\delta : X \longrightarrow \mathbb{N}, x \longmapsto \dim_x(f^{-1}(f(x)))$$

es **semi-continua superior**.

Aquí, para cada $Z \subseteq X$ cerrado, definimos

$$\dim_x(Z) := \max_{x \in Z_i} \{\dim(Z_i)\}$$

donde $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_s$ son las componentes irreducibles de Z .

DIMENSIÓN DE FIBRAS

Prueba de (1): Asumimos Y afín y luego (Noether) $\exists g : Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ finito sobreyectivo. Sea $u : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^m$ y $p := g(y) \in \mathbb{A}^m$. Así, $g^{-1}(p) = \{y, z_1, \dots, z_N\}$ finito y $u^{-1}(p) \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(y) \sqcup f^{-1}(z_1) \sqcup \dots \sqcup f^{-1}(z_N)$. En particular, componentes irreducibles de $f^{-1}(y)$ son componentes irreducibles de $u^{-1}(p)$.

Como $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{A}^m$ dado por las m ecuaciones $x_i - p_i = 0$, $u^{-1}(p)$ está dada (en un abierto afín) por $x_i \circ u - p_i = 0$ en X . Así, toda componente irreducible de $u^{-1}(p)$ es de dimensión $\geq \dim(X) - m \stackrel{\text{def}}{=} n - m$. $\square$

Ejercicio (cf. Apunte): probar (2) y (3). En (2), $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ tiene grado de trascendencia $n - m$: se eligen $u_1, \dots, u_{n-m} \in \mathcal{O}(U)$ alg. independientes sobre $k(Y)$, se completa hasta generar $\mathcal{O}(U)$, y $V \subseteq Y$ es el abierto donde no degeneran las relaciones que ligan los generadores restantes. En (3), inducción en $\dim(X)$: si $r \leq n - m$ entonces $X_r = X$ por (1), y si $r > n - m$ por (2) hay $Z \subsetneq X$ cerrado con $X_r \subseteq Z$ y $X_r \stackrel{\text{def}}{=} Z_r$.

Caso particular importante

Sea $f : X \twoheadrightarrow Y$ morfismo regular sobreyectivo entre variedades irreducibles. Si f es un morfismo **cerrado** (e.g. si X proyectiva) entonces la función $Y \mapsto \mathbb{N}, y \mapsto \dim(f^{-1}(y))$ es semi-continua superior, i.e., para todo $r \in \mathbb{N}$

$Y_r := \{y \in Y \text{ tal que } \dim(f^{-1}(y)) \geq r\}$ es cerrado en Y .

Prueba: Aquí, $Y_r \stackrel{\text{def}}{=} f(X_r)$. Como $X_r \subseteq X$ es cerrado por el Teorema anterior y f morfismo cerrado, $Y_r \subseteq Y$ lo es también. $\square$

Si $f : \mathbb{A}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^3, (x, y, z) \mapsto (x, (xy - 1)y, (xy - 1)z)$, Y_1 **no** es cerrado.

Terminología: Sea $f : X \twoheadrightarrow Y$ morfismo regular sobreyectivo entre variedades irreducibles. La **dimensión relativa** de f en $y \in Y$ es $\dim(f^{-1}(y))$.

Si $\dim(f^{-1}(y)) = d \ \forall y \in Y$, decimos que f es de **dimensión relativa** d , y escribimos $\dim(f) := \dim(X/Y) := d$.

CRITERIO DE IRREDUCIBILIDAD

Sea $f : X \twoheadrightarrow Y$ morfismo regular sobreyectivo **cerrado**. Supongamos que

- 1 Y es irreducible, y que
- 2 Todas las fibras de f son irreducibles de la misma dimensión $d \in \mathbb{N}$.

Entonces, X es irreducible y $\dim(X) = \dim(Y) + d$.

Prueba: Sean $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ componentes irreducibles de X . Para $y \in Y$,

$$d_i(y) := \dim(f_i^{-1}(y)) \text{ donde } f_i := f|_{X_i} : X_i \rightarrow Y,$$

y donde $d \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1, \dots, r} \{d_i(y)\} \forall y \in Y$. Luego, $Y = \bigcup_{i=1}^r \{y \in Y, d_i(y) \geq d\}$ es unión de cerrados. Como Y irreducible, $\exists i_0$ con $d_{i_0}(y) = d \forall y \in Y$.

La fibra $f_{i_0}^{-1}(y)$ está contenida en el cerrado irred. $f^{-1}(y)$, y $\dim(f^{-1}(y)) = \dim(f_{i_0}^{-1}(y))$, por lo que $f_{i_0}^{-1}(y) = f^{-1}(y) \forall y \in Y$. Deducimos que

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) = \bigcup_{y \in Y} f_{i_0}^{-1}(y) \stackrel{\text{def}}{=} X_{i_0} \text{ es irreducible.}$$

Además, por el Teorema anterior $d = \dim(X) - \dim(Y)$ en este caso. □

CRITERIO DE IRREDUCIBILIDAD

Ejemplo: Si X una variedad proyectiva y $f : X \twoheadrightarrow C$ morfismo no-constante, con C curva algebraica irreducible, entonces f sobreyectivo y

$X_t := f^{-1}(t)$ es una **hipersuperficie** para todo $t \in C$,

i.e., $\dim(X_t) = \dim(X) - 1$.

Definición (variedad abeliana)

Una **variedad abeliana** A es un **grupo algebraico**^a que es proyectivo e irreducible. Una variedad abeliana de dimensión 1 es una **curva elíptica**.

^ai.e., una variedad algebraica que tiene la estructura de grupo, y tal que la multiplicación e inversión son morfismos regulares (cf. grupo de Lie).

Cultura general

Si $k = \mathbb{C}$, **toda** variedad abeliana es de la forma $A = \mathbb{C}^g / \Lambda$ donde $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2g}$ es un reticulado, y donde $g = \dim(A)$.

VARIEDADES ABELIANAS SON ABELIANAS

Sea A una variedad abeliana y sea $f : A \times A \rightarrow A$, $(g, h) \rightarrow ghg^{-1}$ con grafo

$$\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(g, h, ghg^{-1}), g, h \in A\} \subseteq A \times A \times A.$$

Veamos que $h = ghg^{-1} \forall g, h \in A$, i.e., $\text{pr}_{23}(\Gamma_f) = \Delta_A \subseteq A \times A$ es la diagonal:

Notar que $A \cong \Delta_A$, y que si consideramos $g = e$ tenemos que $\Delta_A \subseteq \text{pr}_{23}(\Gamma_f)$.

Como A proyectiva irreducible, $A \times A \cong \Gamma_f$ y $\text{pr}_{23}(\Gamma_f)$ también. Además, si

$$\text{pr}_2 : \text{pr}_{23}(\Gamma_f) \longrightarrow A, (h, ghg^{-1}) \longmapsto ghg^{-1},$$

tenemos que $\text{pr}_2^{-1}(e) \stackrel{\text{def}}{=} \{(e, e)\}$ es de dimensión 0.

Por semi-continuidad superior la **fibra general** $\text{pr}_2^{-1}(y)$ tiene dimensión 0, y luego $\dim(\text{pr}_{23}(\Gamma_f)) = \dim(A) + 0 = \dim(A)$.

Así, $\dim(\Delta_A) = \dim(\text{pr}_{23}(\Gamma_f))$ y luego $\text{pr}_{23}(\Gamma_f) = \Delta_A$. □

BLOW-UP STRIKES BACK

Sean $W \subseteq V$ k -e.v. no-nulos, sea $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ y sea $\Lambda := \mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{k-1}$ sub-espacio lineal asociado a W . Si $W = \{f_0 = \dots = f_{n-k} = 0\}$, la función

$$f : U \longrightarrow \mathbb{P}^{n-k}, \quad x \longmapsto [f_0(x), \dots, f_{n-k}(x)]$$

es regular en $U := \mathbb{P}^n \setminus V(f_0, \dots, f_{n-k})$. El **blow-up** $\text{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ es la clausura del grafo Γ_f en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-k}$. Explícitamente, está dado por

$$\text{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n) = \{(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-k}, y_i f_j(x) = y_j f_i(x) \ \forall i, j = 0, \dots, n-k\},$$

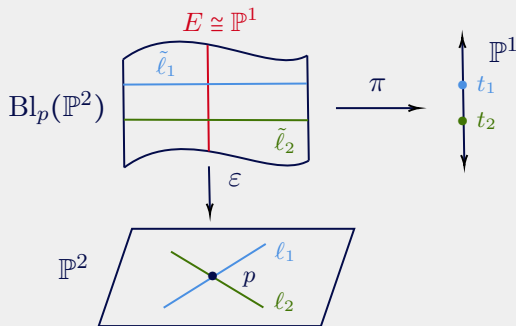
donde $\varepsilon := \text{pr}_1 : \text{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{P}^n$ es el blow-up y $\pi := \text{pr}_2 : \text{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{P}^{n-k}$.

Si $E := \varepsilon^{-1}(\Lambda)$ conjunto excepcional, para todo $x \in \Lambda$ tenemos $\varepsilon^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-k}$ irreducible de dimensión $n-k$.

Así, $\varepsilon|_E : E \longrightarrow \Lambda \cong \mathbb{P}^{k-1}$ cumple las hipótesis del criterio de irreducibilidad, de donde deducimos que $\dim(E) = (k-1) + (n-k) = n-1$, i.e., el conjunto excepcional $E \subseteq \text{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ es una **hipersuperficie**.

BLOW-UP STRIKES BACK

Más aún, se puede probar (**Ejercicio**) que $\pi^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^k$ para todo $y \in \mathbb{P}^{n-k}$ y en particular $\text{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ es irreducible de dimensión n .



En particular, para todo $p \in \mathbb{P}^2$, la superficie $S = \text{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$ posee un morfismo regular sobreyectivo $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ tal que $\pi^{-1}(t) \cong \mathbb{P}^1$ para todo $t \in \mathbb{P}^1$.